Kantonsschule Im Lee, Winterthur

Probeserien

für

Mündliche Maturitätsprüfungen

in

Mathematik

von

Rolf Kleiner

- Im Folgenden sind alle Serien in deutscher *und* englischer Sprache aufgeführt.

- Serien PA1, PA2 etc. enthalten nur Aufgaben, die bereits nach den Sportferien, d.h. vor den letzten Kapiteln (uneigentliche Integrale, Erwartungswerte etc.) gelöst werden können.
- Serien PB1, PB2 etc. sind Probeserien über den *ganzen Stoff*.

1. Gegeben: ΔABC mit $A(4,1,1)$; $B(2,6,2)$, $C(-3,2,3)$ und zwei Punkte $P(0,0,4)$ und $Q(3,9,-2)$.

a) Ist Q von P aus sichtbar, wenn das ΔABC undurchsichtig ist?

[Ebene ABC: $3x - y + 11z - 22 = 0$ (nicht rechnen);
$\Rightarrow$ Durchstosspunkt $D\ (1,3,2)$;
Koordinatenvergleich $\Rightarrow$ *D zwischen P* und Q;
dann AD als Linearkombination von AB und AC,
wobei $u + v = 1/3 + 1/3 < 1 \Rightarrow Q$ ist *nicht* sichtbar]

b) Steht PQ senkrecht auf ΔABC?

[PQ // Normalenvektor (oder Skalarprodukt) → nein]

2. Gegeben: Graph von $y = f(x)$

a) Gleichung des 1. Parabelstücks

[$y = 0.25x^2$, 2. Parabelstück: $y = -0.25(x-4)^2 + 2$]

b) Übergangspunkt P: Graph ist geschmeidig

[f ist differenzierbar, (auch am Wendepunkt)]

c) Graph von f' und f''

[Beachte Wendepunkt mit undefiniertem f '']

3. Wahrscheinlichkeit (*einen* Penalty verschiessen) = 10%.

a) P (4 Penalties nacheinander im Tor) [$0.9^4 = 0.6561$]

b) Letzter 5. Schütze: P(verschiessen) =0.05. P (vier Penalties im Tor, letzten Penalty verschiessen)

[$0.9^4 \cdot 0..05 = 0.0328$]

c) Genau 1 Penalty von 5 verschossen. W'keit, dass es der letzte (beste) Schütze war =?

[$0.0328 / (0.0328 + 4 \cdot 0.1 \cdot 0.9^3 \cdot 0.95) = 0.0328/0.31 = 0.106$]

1 Given a triangle ABC with $A(4,1,1)$; $B(2,6,2)$, $C(-3,2,3)$, and the two points $P(0,0,4)$ und $Q(3,9,-2)$.

a) Is Q visible from P if the triangle is non-transparent?

[Plane ABC: $3x - y + 11z - 22 = 0$ (do not calculate);
$\Rightarrow$ point of intersection $D\ (1,3,2)$;
compare coordinates $\Rightarrow$ *D between P* und Q;
then AD as linear combination of AB and AC,
where $u + v = 1/3 + 1/3 < 1 \Rightarrow Q$ is *not* visible]

b) Is PQ perpendicular to the triangle ABC ?

[PQ // normal vector (or scalar product) → no]

2 Given is the graph of $y = f(x)$.

a) Equation of the first piece of parabola

[$y = 0.25x^2$, 2. piece of parabola: $y = -0.25(x-4)^2 + 2$]

b) Transition point P: Graph is smooth.

[f is differentiable, (also at point of inflection)]

c) Graph of f' und f''

[Note: at point of inflection f '' is not defined.]

3 Probability of misplaying a penalty kick is 10%.

a) P (score 4 penalties in a row) [$0.9^4 = 0.6561$]

b) Last (fifth) scorer: P(misplay)=0.05. P (score 4 penalties in a row, then misplay last penalty)

[$0.9^4 \cdot 0..05 = 0.0328$]

c) Misplayed exactly 1 penalty. Probability that it was the last (best) scorer = ?

[$0.0328 / (0.0328 + 4 \cdot 0.1 \cdot 0.9^3 \cdot 0.95) = 0.0328/0.31 = 0.106$]

1. **a)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\-7\\11\end{pmatrix}$ ist LK von $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}$, wobei $\vec{b}\perp\vec{a}$.

[$\vec{c}=x\cdot\vec{a}+\vec{b}$, multiplizieren mit $\vec{a}$: $\vec{a}\cdot\vec{c}=x\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow x=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{16-7+33}{4+1+9}=\frac{42}{14}=3$ (oder $\vec{c}=x\cdot\vec{a}+\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}-x\cdot\vec{a}$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8-2x\\-7-x\\11-3x\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x=3$);

$\Rightarrow \vec{c}=3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\11\end{pmatrix}$]

b) Anzahl Vektoren wie $\vec{a}$ mit 3 Komponenten, wenn

i) Ziffern 1,2 und 3 ohne Wiederholungen [3! =6]

ii) einstellig, ev. wiederholt, ev. negativ [$19^3=6859$]

2. Auto A: $s_A(t)=t^2$ und Auto B: $s_B(t)=t^3-3t^2+4t$.

a) $v_B(t)=$ [$3t^2-6t+4$]

b) A und B gleich schnell [nur grafisch: 2 Punkte $v_A=v_B$ → $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=2$]

c) Zeitpunkt $t=2$ beschreiben [A schliesst auf, bis sie gleich weit & schnell sind, doch B zieht wieder davon.]

d) Wann ist B am langsamsten? [Wendepunkt $t=1$]

e) Grösster Vorsprung von B für $0\le t\le 2$ [$t_1=\frac{2}{3}$ vgl. **b)**]

1 **a)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}8\\-7\\11\end{pmatrix}$ is a lin. comb. of $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ and $\vec{b}$ with $\vec{b}\perp\vec{a}$.

[$\vec{c}=x\cdot\vec{a}+\vec{b}$, multiply with $\vec{a}$: $\vec{a}\cdot\vec{c}=x\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow x=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\frac{16-7+33}{4+1+9}=\frac{42}{14}=3$ (or $\vec{c}=x\cdot\vec{a}+\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}-x\cdot\vec{a}$ and $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8-2x\\-7-x\\11-3x\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x=3$);

$\Rightarrow \vec{c}=3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-10\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\11\end{pmatrix}$]

b) # of vectors such as $\vec{a}$ with 3 components if

i) digits 1,2 and 3, no repetitions [3! =6]

ii) 1 digit, possibly repet. / negative [$19^3=6859$]

2 Car A: $s_A(t)=t^2$ and Auto B: $s_B(t)=t^3-3t^2+4t$.

a) $v_B(t)=$ [$3t^2-6t+4$]

b) A and B have same speed [only graphically: 2 points $v_A=v_B$ → $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=2$]

c) Describe situation at $t=2$ [A catches up until the two have equal position & speed, then B acceler. more than A.]

d) When is B the slowest? [point of inflection $t=1$]

e) Greatest lead of B for $0\le t\le 2$ [$t_1=\frac{2}{3}$ cf. **b)**]

1. Gegeben: Kugel k mit $M(0,0,0)$ und $r=3$.

a) Gleichung der Kugel k [$x^2+y^2+z^2=9$]

b) Punkt A(x,y,z) mit zufälligen $x,y,z\in\{1, 2, ..., 8, 9\}$.
Wahrscheinlichkeit P (Punkt A innerhalb Kugel k)
[$P((1,1,1),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)) = \frac{4}{9^3}$]

2. Gegeben ist die Zahlenfolge $a_n=\frac{2}{3^n}$.

a) Beschreibung der Folge
[geom., konverg. (lim=0, Nullfolge), beschränkt, monot. fall.]

b) Unendliche Summe [$\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$]

c) Entsprechende Funktion [$y=\frac{2}{3^x}$]

d) Integral, welches der unendlichen Summe entspricht
[$\int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx$;

$\int$ grösser/kleiner als s=1 ? s = Obersumme $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx < 1$;

Wert: $\int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx = \frac{-2}{ln3}\cdot 3^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{-2}{ln3}\cdot\left(0-\frac{1}{3}\right)=0.6068$;

Begriff Stammfunktion erklären, Funktionenschar etc.]

1 Given is a sphere with centre $O(0,0,0)$ and $r=3$.

a) Equation of the sphere [$x^2+y^2+z^2=9$]

b) Point A (x,y,z) with random $x,y,z\in\{1, 2, ..., 8, 9\}$.
Probability that point P lies within the sphere.
[$P((1,1,1),(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)) = \frac{4}{9^3}$]

2 Given is the number sequence $a_n=\frac{2}{3^n}$.

a) Describe the sequence
[geometric, convergent (lim=0), bounded, decreasing]

b) sum to infinity [$\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$]

c) corresponding function [$y=\frac{2}{3^x}$]

d) integral, which corresponds with the sum to infinity
[$\int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx$;

$\int$ greater/smaller than s=1 ? s = upper sum $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx < 1$;

value: $\int_1^\infty \frac{2}{3^x}dx = \frac{-2}{ln3}\cdot 3^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{-2}{ln3}\cdot\left(0-\frac{1}{3}\right)=0.6068$;

explain term ‚antiderivative', set of functions etc.]

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix}6\\13\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

[nur Gleichungssystem ohne Lösung genügt (x=4, y=5)]

b) geometrische Bedeutung? [wann unmöglich?]

c) Vektor $\vec{n}\perp\vec{a}$. $\vec{n}$ =? [z.B. $\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$]

d) $\vec{m}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, wobei $x, y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Wahrscheinlichkeit, dass $\vec{m}$ nicht senkrecht auf $\vec{a}$?

[$1-\frac{1}{9^2}=\frac{80}{81}$]

2. Gegeben ist die Ableitung von f: $f'(x)=e^x-3x^2$

a) Extremalstellen von f

[Newton, keine Details, $x=-0.46$, $x=0.91$, $x=3.73$]

b) Minimum oder Maximum von f bei $x=0.91$

[$f''(x)=e^x-6x$, $f''(0.910)<0 \Rightarrow$ Max von f]

c) Anzahl Extremalstellen von f

[Schnittpunkt der Graphen von $y=e^x$ und $y=3x^2 \Rightarrow 3$]

d) Funktionsgleichung von f

[Integral: $y=e^x-x^3+C$]

1 Given are the vectors $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ and $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix}6\\13\end{pmatrix}$ is a linear combination of $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

[only system of equations, don't solve: (x=4, y=5)]

b) geometric meaning? [when impossible?]

c) vector $\vec{n}\perp\vec{a}$. $\vec{n}$ =? [e.g. $\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$]

d) $\vec{m}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ where $x, y\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Probability that $\vec{m}$ is not perpendicular to $\vec{a}$?

[$1-\frac{1}{9^2}=\frac{80}{81}$]

2 Given is the derivative of a function f: $f'(x)=e^x-3x^2$

a) stationary values of f

[Newton, no details, $x=-0.46$, $x=0.91$, $x=3.73$]

b) minimum or maximum of f at $x=0.91$

[$f''(x)=e^x-6x$, $f''(0.910)<0 \Rightarrow$ max of f]

c) number of stationary values of f

[points of intersection of $y=e^x$ and $y=3x^2 \Rightarrow 3$]

d) equation of function f

[integral: $y=e^x-x^3+C$]

1. Jede der 7 Münzen (5 Rappen bis 5 Franken) wird 1 Mal geworfen. Sie gewinnen jede Münze, die Zahl zeigt.

a) P(Gewinn aller 7 Münzen) [$\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$]

b) P(Gewinn von mindestens 3 Fr)

[$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
Fünfliber oder, wenn kein Fünfliber, dann 1- und 2-Fränkler]

c) Durchschnittlicher Gewinn.

[$\frac{1}{2} \cdot (0.05 + 0.10 + ... + 2 + 5) = \text{Fr. } 4.425$]

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2e^{4x^2}$.

[Ich skizziere den Graphen, aber nur im negativen Bereich.]

a) Punkt P auf Graph von f mit Steigung 3 skizzieren?

[Punkt auf Graph einzeichnen]

b) Vektor senkrecht auf Graph in Punkt P [z.B. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$]

c) x-Koordinate von Punkt P [$y' = 16x \cdot e^{4x^2} = 3$;

Newtonfunktion: $n(x) = 16x \cdot e^{4x^2} - 3$

$\Rightarrow n'(x) = 16(8x^2 + 1) \cdot e^{4x^2}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 - \frac{n(0)}{n'(0)} = -\frac{-3}{16} \approx 0.1875$

(oder $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0.889$); genauer: $x = 0.168$]

1 Each one of the coins from 0.05 francs to 5 francs is thrown *once*. You win each coin that shows tails.

a) P(you win all the 7 coins) [$\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$]

b) P(you win at least 3 francs)

‘[$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
‘Fünfliber’ or, if no Fünfliber’, then ‘1-‘ and ‘2-Fränkler’]

c) average gain [$\frac{1}{2} \cdot (0.05 + 0.10 + ... + 2 + 5) = \text{Fr. } 4.425$]

2 Given is the function $f(x) = 2e^{4x^2}$.

[I draw the graph, but only for negative x.]

a) Draw point P on graph of f with gradient 3.

[Draw point on graph.]

b) vector perpendicular to graph at point P [e.g. $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$]

c) x-coordinate of point P [$y' = 16x \cdot e^{4x^2} = 3$;

Newton function: $n(x) = 16x \cdot e^{4x^2} - 3$

$\Rightarrow n'(x) = 16(8x^2 + 1) \cdot e^{4x^2}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 - \frac{n(0)}{n'(0)} = -\frac{-3}{16} \approx 0.1875$

(or $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0.889$); more precisely: $x = 0.168$]

1. Trapezregel.

a) Sinn und Zweck der Trapezregel.

b) Genauigkeit der Trapezregel.

[Beispiel angeben: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx \;\Rightarrow$ Annäherung ist zu klein;
Simpson'sche Regel (Parabeln) ist genauer]

c) Bedingungen für zu grossen / zu kleinen Wert.

[zu gross: y'' < 0 ; zu klein: y'' > 0]

2. Urne mit Kugeln. P(Kugel ist schwarz) = p.

a) Ziehe 10 Kugeln mit Zurücklegen.
Ereignis A = { genau 2 von 10 Kugeln sind schwarz }

i) $P(A)$ = [$\binom{10}{2} p^2 \cdot (1-p)^8$]

ii) Bestimme p so, dass $P(A)$ maximal wird.

[$P'(A) = \binom{10}{2} \cdot \left(p^2 \cdot 8(1-p)^7(-1) + 2p \cdot (1-p)^8\right) = 0$;

$-8p + 2(1-p) = 0 \;\Rightarrow p = \frac{1}{5}$]

b) In der Urne befinden sich total 18 Kugeln.
Bestimme die Anzahl schwarzer Kugeln (von 18),
so dass P(genau 2 von 10 Kugeln sind schwarz)
maximal wird.

[0.2 · 18 = 3.6 ⇒ Schätzung: 4 schwarze Kugeln;
genauer: $B_{10,\frac{3}{18}}(2) = 0.2907$, $B_{10,\frac{4}{18}}(2) = 0.2976$]

1 Trapezoidal Rule

a) It's significance:

b) It's accuracy: [I give example: $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$
⇒ approximation is too small;
Simpson's Rule (Parabolas) is more precise]

c) When are the results too large? When too small?

[too large: y'' < 0 ; too small: y'' > 0]

2 Bag with marbles. P(marble is black) = p.

a) Draw 10 marbles (and put them back in between).
Event A = { exactly 2 out of 10 marbles are black }

i) $P(A)$ = [$\binom{10}{2} p^2 \cdot (1-p)^8$]

ii) Find p such that $P(A)$ is a maximum.

[$P'(A) = \binom{10}{2} \cdot \left(p^2 \cdot 8(1-p)^7(-1) + 2p \cdot (1-p)^8\right) = 0$;

$-8p + 2(1-p) = 0 \;\Rightarrow p = \frac{1}{5}$]

b) The bag contains 18 marbles in total. Find the number of black marbles such that P(exactly 2 out of 10 marbles are black) is a maximum.

[0.2 · 18 = 3.6 ⇒ estimate: 4 black marbles;
more precisely: $B_{10,\frac{3}{18}}(2) = 0.2907$, $B_{10,\frac{4}{18}}(2) = 0.2976$]

1. Glücksrad mit Trefferwahrscheinlichkeit p.
Glücksrad 5 Mal drehen.
Ereignis A = { genau *ein* Gewinn }

a) $P(A)$ = [$\binom{5}{1} \cdot p \cdot (1-p)^4$]

b) p so, dass $P(A)$ Maximum. [$P(p) = 5p \cdot (1-p)^4$

$$P'(p) = 5\left[(1-p)^4 - 4p(1-p)^3\right] = 5(1-p)^3 \cdot (1-5p) = 0$$

$\Rightarrow p = \frac{1}{5}$]

c) Maximaler Wert von $P(A)$ = [$5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0.4096$]

Glücksrad ***n*** Mal drehen (statt 5 Mal):

d) p so, dass $P_n(A)$ Maximum. Vermutung? [$\frac{1}{n}$]

e) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) =$ (für maximalen Wert von $P_n(A)$)

[$n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{n-1} \to e^{-1} = 0.368$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$]

2. Gegeben sind die Punkte $A(4,4,4)$ und $B(0,-4,-4)$.

a) Bestimme Punkte P auf x-Achse so, dass $PA \perp PB$.

[$\begin{pmatrix} x-4 \\ 0-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ 0-(-4) \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = 0$, $x^2 - 4x - 32 = 0$, $x_1 = 8$, $x_2 = 4$]

b) Alle Punkte P so, dass $PA \perp PB$.

[Thaleskugel: $M(2,0,0)$,
$r = \overline{AM} = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6$; $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 36$]

1 Probability of winning a game is p. You play 5 times.
Event A = { you win exactly once }

a) $P(A)$ = [$\binom{5}{1} \cdot p \cdot (1-p)^4$]

b) p such that $P(A)$ is maximum. [$P(p) = 5p \cdot (1-p)^4$

$$P'(p) = 5\left[(1-p)^4 - 4p(1-p)^3\right] = 5(1-p)^3 \cdot (1-5p) = 0$$

$\Rightarrow p = \frac{1}{5}$]

c) Maximum value of $P(A)$ = [$5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0.4096$]

Now play ***n*** times (instead of 5 times).

d) p such that $P_n(A)$ is a maximum. [$\frac{1}{n}$]

e) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) =$ (for the maximum value of $P_n(A)$)

[$n \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{n-1} \to e^{-1} = 0.368$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$]

2 Given are the points $A(4,4,4)$ and $B(0,-4,-4)$.

a) Find points P on the x-axis such that $PA \perp PB$.

[$\begin{pmatrix} x-4 \\ 0-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ 0-(-4) \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = 0$, $x^2 - 4x - 32 = 0$, $x_1 = 8$, $x_2 = 4$]

b) Consider all points P such that $PA \perp PB$.

[Thales sphere: $M(2,0,0)$,
$r = \overline{AM} = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6$; $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 36$]