Kantonsschule Im Lee

Schriftliche Maturitätsprüfungen 2019 im Fach Mathematik

Klassen:	4b	und	4e
Profil:	N/MN		MN
Lehrperson:	Rolf Kleiner		

Zeit:	3 Stunden
Hilfsmittel:	Grafiktaschenrechner ohne CAS, Formelsammlung

Vorbemerkung zu den Aufgabenstellungen

Schreiben Sie Ihre Lösungswege klar nachvollziehbar auf.

Geben Sie numerische Ergebnisse, wenn möglich, exakt, andernfalls sinnvoll gerundet an.

Die Prüfung enthält 6 Aufgaben mit 100 Punkten.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Total
Punkte	14	9	12	14	28	23	100

Aufgaben

1. [14P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Bei den folgenden zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben geht es um die Bestimmung von Parameterwerten.

a) [8P] Bestimmen Sie die Werte von a, b und c, wenn der Graph der Funktion f im Punkt $P(-1, 3)$ die Steigung -13 hat und an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt besitzt.

b) [6P] Nun sei $a > 0$, $b = 2$ und $c = 0$, also $f(x) = ax^3 + 2x^2$.

Bestimmen Sie den Wert von a, wenn die Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird, einen Flächeninhalt von $\frac{32}{3}$ hat.

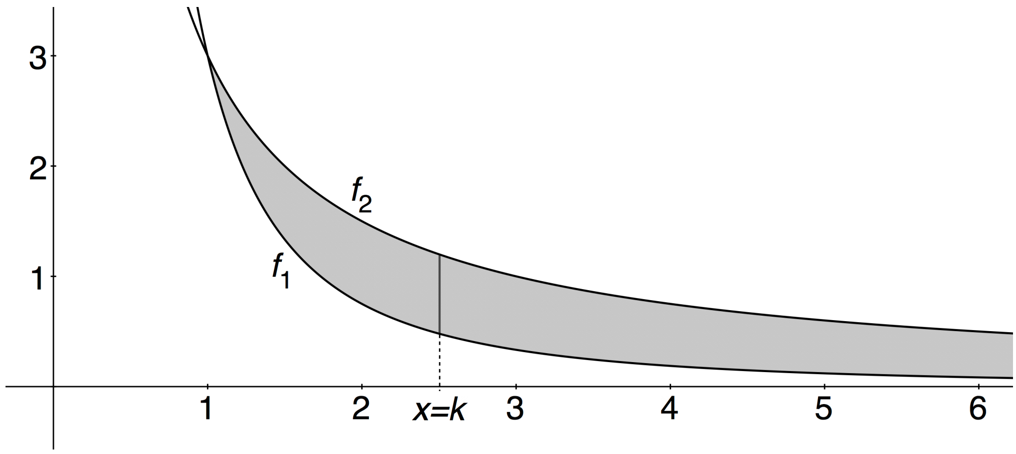
2. [9P] Gegeben ist das Integral $I = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx$.

a) [2P] Bestimmen Sie den Wert von I mit Hilfe einer Stammfunktion.

b) [2P] Erklären Sie, warum I negativ ist. Benutzen Sie dabei auch den Begriff „Integrationsrichtung“.

c) [5P] Bestimmen Sie einen Näherungswert für I mit Hilfe der Parabelmethode (Simpson) und 4 Teilintervallen, und berechnen Sie den prozentualen Fehler.

3. [12P] Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = \dfrac{3}{x^2}$ und $f_2(x) = \dfrac{3}{x}$. (siehe Figur)



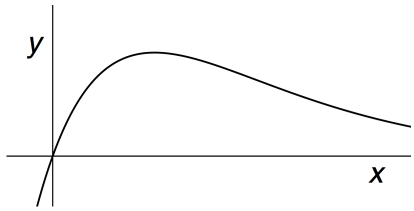
a) [4P] Bestimmen Sie, ob die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen für $1 < x < \infty$ endlichen oder unendlichen Flächeninhalt hat. Notieren Sie am Schluss Ihrer Rechnung mit einer genauen „lim"-Notation den kritischen Grenzwert und werten Sie diesen aus.

b) [4P] Bestimmen Sie durch exakte Berechnung diejenige Stelle $x = k$ (für $1 < x < \infty$), an welcher die beiden Funktionskurven den grössten vertikalen Abstand haben.

c) [4P] Die Fläche zwischen der Kurve von $f_1(x) = \dfrac{3}{x^2}$ und der x-Achse für $1 < x < \infty$ wird um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie den exakten Wert für das Volumen des Rotationskörpers.

4. [14P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-ax}$ in Abhängigkeit des Parameters $a > 0$, wobei e die Euler'sche Zahl symbolisiert.

a) [4P] Es sei $a = 2$, also $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ (siehe Figur).
Bestimmen Sie die beiden Koordinaten des Extrempunkts der Funktion f.



b) [6P] Bestimmen Sie allgemein für $a > 0$ die beiden Koordinaten des Wendepunkts der Funktion f.

c) [2P] Zeigen Sie, dass die Steigung der Wendetangente an den Graphen der Funktion f vom Wert des Parameters a unabhängig ist.

d) [2P] Zeigen Sie, dass die Wendepunkte für die verschiedenen Werte von a allesamt auf einer Geraden liegen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden in der Form $y = mx + q$.

5. [28P] Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken $A(3,2,0)$, $B(0,2,1)$ und $C(3,14,-6)$.

a) [3P] Bestimmen Sie den Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$.

b) [3P] Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks 21 beträgt.

c) [3P] Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Punkte A, B und C enthält.

d) [2P] Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punkts $C(3,14,-6)$ von der x-Achse.

e) [7P] In Teilaufgabe **b)** wurde gezeigt, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 21 hat. Dieses Dreieck ABC bildet die Grundfläche einer Pyramide.

Die Spitze S der Pyramide liegt auf der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Das Volumen der Pyramide beträgt 1.
Bestimmen Sie die Koordinaten aller möglichen Spitzen S.

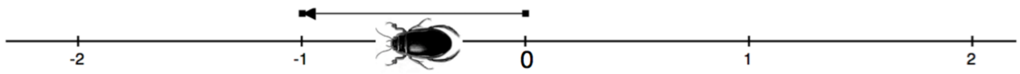
Zusätzlich gegeben ist der Punkt $D(5,3,-1)$. Die Bestimmung von Gleichungen der Mittelnormalebenen der Strecken AB und AC ergibt:
$E_{M(AB)}: \ -3x + z + 4 = 0$ und $E_{M(AC)}: \ 2y - z - 19 = 0$.

f) [3P] Zeigen Sie, dass die Gerade $s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ die Schnittgerade der beiden Mittelnormalebenen ist.

g) [3P] Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Mittelnormalebene der Strecke AD. (Erinnerung: $A(3,2,0)$ und $D(5,3,-1)$)

h) [4P] Bestimmen Sie eine Gleichung der Umkugel der Pyramide $ABCD$, d.h. derjenigen Kugel, welche durch alle vier Ecken verläuft.

6. [23P] Ein Käfer kriecht auf einer Zahlengeraden. Er startet auf der Zahl 0 und kriecht in jeweils *einer* Minute von einer *ganzen* Zahl zur benachbarten *ganzen* Zahl. Er kriecht immer mit der Wahrscheinlichkeit 0.25 zur nächst*grösseren* und mit der Wahrscheinlichkeit 0.75 zur nächst*kleineren* Zahl.



a) [1P] Geben Sie alle möglichen Positionen des Käfers nach 3 Minuten an.

b) [2P] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Käfer nach 3 Minuten auf der Zahl 1 befindet.

c) [8P] Die Zufallsgrösse X bezeichne den Abstand des Käfers von der Zahl 0 nach 3 Minuten.
Zum Beispiel: Position auf der Zahl –3 $\Rightarrow$ Abstand $X = 3$.

i) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ.

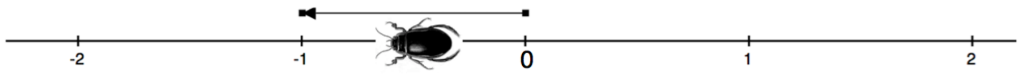
ii) Bestimmen Sie die Varianz $V(X)$ bzw. σ^2.

iii) Zeigen Sie, dass sich alle möglichen Abstände im Intervall $\mu \pm 2\sigma$ befinden.

d) [2P] 4 Minuten nach dem Start befindet sich der Käfer wieder auf der Zahl 0. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Käfer auf dem Weg bei der Zahl 2 vorbeigekommen ist.

e) [3P] Es sei A_n das Ereignis, dass der Käfer sich n Minuten nach dem Start auf der Zahl n befindet. Bestimmen Sie mit algebraischen Methoden diejenigen Werte von n, für welche die Wahrscheinlichkeit $P(A_n)$ kleiner als 10^{-9} ist.

f) [2P] Es sei B_n das Ereignis, dass der Käfer sich n Minuten nach dem Start wieder auf der Zahl 0 befindet. Bestimmen Sie ohne Berechnung den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)$ und erklären Sie Ihr Resultat in einem Satz.



g) [5P] Nun sei die Wahrscheinlichkeit, zur nächstgrösseren bzw. zur nächstkleineren Zahl zu kriechen, nicht wie bisher 0.25 bzw. 0.75, sondern p bzw. $1-p$.

i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p, dass der Käfer innerhalb von 9 Minuten acht Mal zur nächst*grösseren* und nur ein Mal zur nächst*kleineren* Zahl kriecht.

ii) Bestimmen Sie den Wert von p so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Käfer 9 Minuten nach dem Start auf der Zahl 7 befindet, möglichst gross wird.

Ende Prüfung

Bei komplizierteren Punkteverteilungen wird grundsätzlich pro groben Fehler ein Punkt abgezogen.

1. a) $f(-1)=3$ 1P ; $f'(-1)=-13$ 1P ; $f''(0)=0$ 1P

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\Rightarrow\; f''(x)=6ax+2b$ 1P

$$\left|\begin{array}{r} -a+b-c=3 \\ 3a-2b+c=-13 \\ 2b=0 \end{array}\right| \quad 6\downarrow \quad \Rightarrow \boxed{a=-5\,,\,b=0\,,\,c=2} \quad 8P$$

b) $ax^3+2x^2=0 \Rightarrow x^2(ax+2)=0$ 1↓ $\Rightarrow x=0$ oder $x=-\dfrac{2}{a}$ 2↓

$$\int_{-\frac{2}{a}}^{0}\left(ax^3+2x^2\right)dx \quad 3\downarrow \quad =\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-\frac{2}{a}}^{0} \quad 4\downarrow \quad =\left[0-\left(\frac{1}{4}\cdot a\cdot\frac{16}{a^4}+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{8}{a^3}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{16}{12a^3}=\frac{4}{3a^3}\;;\;\text{Gegeben } A=\frac{32}{3}:\;\frac{4}{3a^3}=\frac{32}{3} \quad 5\downarrow \quad \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \quad 6P$$

---

2. a) $$I=\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\,dx=-\cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=\left(-\cos(2\pi)\right)-\left(-\cos(\pi)\right) \quad 1\downarrow \quad =(-1)+(-1)=\boxed{-2} \quad 2P$$

b) „Funktionswerte des Integranden" sind negativ: $\sin(x)<0$ für $\pi<x<2\pi$, aber

„Integrationsrichtung" ist positiv ($\pi<2\pi$); negativ · positiv = negativ $\Rightarrow I<0$ 2P

c) $$I\approx\frac{2\pi-\pi}{3\cdot4}\cdot\left(0+4\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)+2\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+4\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)+0\right) \quad 3\downarrow \quad =\frac{\pi}{12}\cdot\left(-4\sqrt{2}-2\right)$$

$\Rightarrow \boxed{I\approx-2.00460}$ 4↓ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{prozentualer Fehler }\approx 0.23\%}$ 5P

---

3. a) $$\int_{1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}\right)dx \quad 1\downarrow \quad =\left[3\cdot\ln(x)+\frac{3}{x}\right]_{1}^{\infty} \quad 2\downarrow \quad =\lim_{b\to\infty}\left(3\cdot\ln(b)+\frac{3}{b}\right)-(0+3)=\boxed{\infty} \quad 4P$$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}$ mit $f'(x)=0$ 1↓ ; $f'(x)=-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}=0$ 3↓ $\Rightarrow \boxed{x=k=2}$ 4P

c) $$V=\pi\cdot\int_{1}^{\infty}\frac{9}{x^4}\,dx \quad 2\downarrow \quad =\pi\cdot\left[\frac{9}{-3}x^{-3}\right]_{1}^{\infty} \quad 3\downarrow \quad =\pi\cdot\left[(0)-(-3)\right]=\boxed{3\pi}\approx 9.4248 \quad 4P$$

---

4. a) $f'(x)=(1-2x)\cdot e^{-2x}=0$ 2↓ $\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 3↓ $\Rightarrow y=\dfrac{1}{2e}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Extrempunkt}}$

$\boxed{\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2e}\right)}$ 4P

b) $f'(x)=(1-ax)\cdot e^{-ax}$ 1↓ $\Rightarrow f''(x)=a(ax-2)\cdot e^{-ax}$ 3↓ ; $f''(x)=0$ 1P

$\Rightarrow a(ax-2)\cdot e^{-ax}=0 \quad \Rightarrow x=\frac{2}{a}$ 5↓ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Wendepunkt } \left(\frac{2}{a},\frac{2}{a\cdot e^2}\right)}$ 6P

c) Steigung der Wendetagente $=f'\left(\frac{2}{a}\right)=(1-2)\cdot e^{-2}=-\frac{1}{e^2}$ unabhängig von a 2P

d) $x=\frac{2}{a}\ ,\ y=\frac{2}{ae^2}$; a eliminieren $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Gerade } y=\frac{1}{e^2}\cdot x}$ 2P

---

5. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\12\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\arccos\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$ 1P

$=\arccos\frac{-6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{180}}$ 2↓ $=$ $\boxed{98.13°}$ 3P

b) $A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ 1↓ $=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-12\\-18\\-36\end{pmatrix}\right|$ 2↓ $=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-18)^2+(-36)^2}=$ $\boxed{21}$ 3P

c) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-12\\-18\\-36\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \Rightarrow E_{ABC}:2x+3y+6z+d=0$ 1↓

Punkt einsetzen ... 2↓ $\Rightarrow d=-12 \Rightarrow$ $\boxed{E_{ABC}:2x+3y+6z-12=0}$ 3P

d) Der nächste Punkt auf der x-Achse ist $X(3,0,0)$, weil $x_C=3$ 1↓

$\Rightarrow d=\overline{CX}=\sqrt{14^2+(-6)^2} \Rightarrow$ $\boxed{d=\sqrt{232}=2\cdot\sqrt{58}\approx 15.2315}$ 2P

e) $V=\frac{G\cdot h}{3} \Rightarrow h=\frac{3V}{G}=\frac{3\cdot 1}{21}=\frac{1}{7}$ 1P ; Spitze $S\ (2+t,-3+2t,2-t)$ 1P

Abstand (Punkt S, Ebene ABC) $=\frac{|2(2+t)+3(-3+2t)+6(2-t)-12|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{1}{7}$ 3↓

$\Rightarrow |2t-5|=1$ 4↓ $\Rightarrow t=2$ oder $t=3$ 5↓ $\Rightarrow$ $\boxed{S_1(4,1,0) \text{ oder } S_2(5,3,-1)}$ 7P

f) Z. B. ist zu zeigen, dass zwei Punkte von s in beiden Ebenen liegen.

$P_1(5,15,11)\in E_{M(AB)}:-3\cdot 5+11+4=0$ 1↓ , $P_1(5,15,11)\in E_{M(AC)}:2\cdot 15-11-19=0$

$P_2(3,12,5)\in E_{M(AB)}:-3\cdot 3+5+4=0$, $P_2(3,12,5)\in E_{M(AC)}:2\cdot 12-5-19=0$ 3P

g) $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Ebene: $2x+y-z+d=0$ 1P ; $M_{AD}(4;2.5;-0.5)$ 1P

$\Rightarrow 2\cdot(4)+(2.5)-(-0.5)+d=0 \Rightarrow d=-11 \Rightarrow$ $\boxed{E_{M(AD)}:2x+y-z-11=0}$ 3P

h) M ist der Schnittpunkt aller Mittelnormalebenen, also $M=s\cap E_{M(AD)}$.

$2(5+2t)+(15+3t)-(11+6t)-11=0$ 1↓ $\Rightarrow t=-3 \Rightarrow M(-1,6,-7)$ 2↓

$r=|MA|=9$ 3↓ $\Rightarrow$ $\boxed{(x+1)^2+(y-6)^2+(z+7)^2=81}$ 4P

---

6. a) $\boxed{\text{mögliche Zahlpositionen: } -3,\ -1,\ 1,\ 3}$ 1P

b) $3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$ 1↓ $=$ $\boxed{\frac{9}{64}=0.1406}$ 2P

c) Tabelle:

Zahlposition	-3	-1	1	3	
Abstand X von 0	3	1	1	3	1↓
Wahrscheinlichkeit	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	2↓

i) $E(X)=3\cdot\left(\frac{27}{64}+\frac{1}{64}\right)+1\cdot\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\right)$ 3↓ $=$ $\boxed{\frac{15}{8}=1.875}$ 4P

ii) $V(X)=3^2\cdot\left(\frac{27}{64}+\frac{1}{64}\right)+1^2\cdot\left(\frac{27}{64}+\frac{9}{64}\right)-\left(\frac{15}{8}\right)^2$ +1P $=$ $\boxed{\frac{63}{64}=0.9844}$ 2P

iii) $\mu\pm2\sigma=\frac{15}{8}\pm2\cdot\frac{\sqrt{63}}{8}$ 1↓ $=1.875\pm2\cdot0.992\ =\ 3.86$ bzw. -0.11

$\Rightarrow$ $\boxed{-0.11<1 \text{ bzw. } 3<3.86}$ 2P

d) $P(\{\rightarrow,\rightarrow,\leftarrow,\leftarrow\}$, falls $\{$2 Mal von 4: $\rightarrow$ (und 2 Mal: $\leftarrow$)$\})$ 1↓ $=\frac{1}{\binom{4}{2}}=$ $\boxed{\frac{1}{6}}$ 2P

e) $P(A_n)=(0.25)^n$ 1↓ ; $(0.25)^n<10^{-9}\Rightarrow n>\frac{\log(10^{-9})}{\log(0.25)}$ 2↓ $=14.9\Rightarrow$ $\boxed{n\geq15}$ 3P

f) $\boxed{\lim_{n\to\infty}P(B_n)=0}$ 1↓

$\boxed{\text{Für } n\to\infty \text{ bewegt sich der Käfer tendenziell immer weiter nach links.}}$ 2P

g) i) 8 Mal von 9: $\rightarrow$ (und 1 Mal: $\leftarrow$): Binomialverteilung 1↓ $\Rightarrow$ $\boxed{9p^8(1-p)}$ 2P

ii) $f(p)=9p^8(1-p)$ maximieren mit Hilfe von f' 1↓ :

$f(p)=9(p^8-p^9)\Rightarrow f'(p)=9(8p^7-9p^8)=0$ 2↓ $\Rightarrow$ $\boxed{p=\frac{8}{9}=0.8889}$ 3P

Notenskala und Resultate – Maturitätsprüfung 2019 – Klassen 4b N/MN und 4e MN – Mathematik

Note	**6**	**5.5**	**5**	**4.5**	**4**	**3.5**	**3**	**2.5**	**2**	**1.5**	**1.0**
Anzahl Punkte	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	0
Anzahl SchülerInnen	9	5	7	4	5	2	3	1	3	1	0

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Themengebiet	Diff/Int	Diff/Int	Diff/Int	Diff/Int	VektGeo	Stoch	
Anzahl Punkte	14	9	12	14	28	23	100
davon aus Pool	14	0	0	14	26	23	77