



MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2016

Klasse: **4g**

Profil: **MN**

Lehrperson: **Rolf Kleiner**

MATHEMATIK

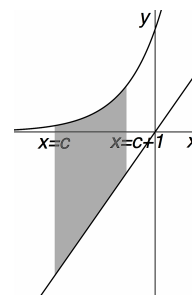
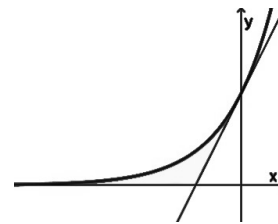
Zeit: **3 Stunden**

Erlaubte Hilfsmittel: **Grafiktaschenrechner ohne CAS, beliebige Formelsammlung**

Bemerkungen: **Die Prüfung enthält 8 Aufgaben mit 100 Punkten.**
Lösen Sie jede Aufgabe auf ein separates A4-Blatt.
Schreiben Sie Ihre Lösungswege klar nachvollziehbar auf.
Geben Sie numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet an.

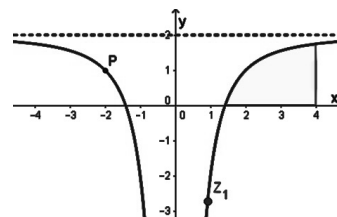
1. [18P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x}$ (siehe Figur).

- a) Bestimmen Sie den spitzen Winkel, unter welchem der Graph der Funktion f die y -Achse schneidet.
- b) Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f , der Tangente im y -Achsenabschnitt des Graphen und der negativen x -Achse (siehe Figur) wird um die x -Achse rotiert. Bestimmen Sie den exakten Wert für das Volumen des Rotationskörpers.
- c) Zwischen dem Graphen von $f(x) = e^{2x}$ (wie oben) und der Geraden $g(x) = x$ wird über dem Intervall $[c, c+1]$ eine Fläche eingeschlossen (siehe Figur). Bestimmen Sie den exakten Wert des Parameters c , für welchen dieser Flächeninhalt minimal wird.



2. [6P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}$ (siehe Figur).

- a) Zeigen Sie formal mit Hilfe der Funktionsgleichung, dass der Graph der Funktion symmetrisch zur y -Achse ist.
- b) Der Punkt $Z_1(u, v)$ liegt auf dem Graphen der Funktion, wobei $u > 0$ und $v < 0$ (siehe Figur). $Z_2(-u, v)$ entsteht durch Spiegelung von Z_1 an der y -Achse. Z_1 , Z_2 und $O(0,0)$ bilden die Ecken des Dreiecks OZ_1Z_2 . Bei Rotation dieses Dreiecks um die y -Achse entsteht ein Kegel. Bestimmen Sie den Grenzwert des Kegelvolumens, wenn der Punkt Z_1 entlang des Graphen nach unten (d. h. in Richtung negativer y -Achse) wandert.



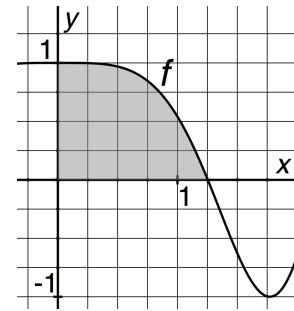
3. [8P] Eine Polynomfunktion dritten Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat in $x = 1$ sowohl eine Nullstelle als auch eine Extremstelle. Ausserdem hat der Graph von f im Punkt $P(-1, -8)$ die Steigung 16. Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b , c und d .

4. [4P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sum_{k=1}^{100} \ln(x^k)$.

Bestimmen Sie einen vereinfachten Ausdruck für die erste Ableitung $f'(x)$.

5. [15P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(x^2)$.

- Bestimmen Sie einen exakten Wert für die kleinste positive Nullstelle von f .
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Trapezmethode und fünf Teilintervallen einen Näherungswert für den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und den beiden Koordinatenachsen (siehe Figur).
- Erklären Sie nur auf Grund des Graphen in der Figur (ohne Berechnungen), ob der Näherungswert aus Aufgabe b) zu gross oder zu klein ist.



Es sei x_w die kleinste positive Wendestelle von f .

- Zeigen Sie, dass x_w eine Nullstelle der Funktion $n(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)$ ist.
 - Illustrieren und erklären Sie mit Hilfe einer groben Skizze des Graphen der Funktion $n(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)$, warum $x_1 = 1$ ein ungünstiger Startwert wäre, um x_w mit dem Newtonverfahren anzunähern.
 - Geben Sie mit Hilfe Ihres Grafiktaschenrechners die Koordinaten des Wendepunkts (x_w, y_w) von f auf 4 Dezimalen genau an.
6. [17P] Gegeben sind die Ebene $\varepsilon_1: 7x + 6y - 6z - 29 = 0$ und die Ebene ε_2 , welche durch die Punkte $A(1,0,0)$, $B(7,2,9)$ und $D(-5,9,2)$ definiert ist.
- Beweisen Sie, dass A , B und D die Ecken eines *gleichschenkligh-rechtwinkligen* Dreiecks mit rechtem Winkel bei der Ecke A bilden.
 - Bestimmen Sie den Punkt C so, dass $ABCD$ ein Quadrat bildet.
 - Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Ebene ε_1 und der x - y -Ebene.
 - Beweisen Sie, dass die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 parallel sind.
 - Bestimmen Sie den Abstand zwischen den beiden Ebenen ε_1 und ε_2 .
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Kugel mit folgenden Eigenschaften:
 - Der Mittelpunkt der Kugel ist der Mittelpunkt der Strecke BD .
 - Die Ebene ε_1 ist Tangentialebene der Kugel.
 - Die Ebene ε_3 steht senkrecht auf ε_1 und enthält die Punkte B und D . Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von ε_1 und ε_3 .

7. [11P] Ein *gerader* Kreiskegel hat die Spitze $S(16, -11, 9)$. Der Grundkreis liegt in der Ebene $\varepsilon : 9x - 6y + 2z + 14 = 0$ und enthält den Punkt $P(0, -1, -10)$.
- Zeigen Sie, dass der Punkt P in der Ebene ε liegt.
 - Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Mantellinie SP bezüglich der Grundkreisebene ε .
 - Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M des Grundkreises.
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Grundkreis durch P .
(Diese Tangente liegt natürlich ebenfalls in der Ebene ε .)
8. [21P] Eine Urne enthält 6 schwarze und 4 rote Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen aus der Urne entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei Kugeln schwarz sind, lässt sich folgendermassen berechnen: $P(2) = 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{2}$.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl entnommener schwarzer Kugeln.
- Das Experiment wird nun 100 Mal wiederholt, wobei jeweils nach jeder Entnahme von drei Kugeln dieselbe Ausgangslage mit 6 schwarzen und 4 roten Kugeln in der Urne wiederhergestellt wird.
- Insgesamt wurden 160 schwarze Kugeln entnommen. Bestimmen Sie, ob gemäss der $\mu \pm 2\sigma$ -Regel diese Anzahl (also 160 von maximal 300 schwarzen Kugeln) als „normal“ betrachtet werden soll.
 - Erklären Sie mit oder ohne Berechnung, ob die Standardabweichung grösser, gleich gross oder kleiner gewesen wäre, wenn jede entnommene Kugel sofort zurückgelegt worden wäre.
- A und B spielen ein Spiel. Und zwar gewinnt A, wenn alle drei entnommenen Kugeln schwarz sind. B gewinnt, wenn mindestens zwei Kugeln rot sind. Sonst ist es unentschieden.
- Bestimmen Sie die Gewinn-Wahrscheinlichkeiten für beide Spieler sowie die Wahrscheinlichkeit eines Unentschiedens.
 - Das erste Spiel gewinnt B. Bestimmen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel schwarz war.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A von den nächsten 20 Spielen mindestens 4 Spiele gewinnt.
 - Am nächsten Tag wollen A und B so viele Male spielen, dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.9999% nicht jedes Mal unentschieden endet, sondern dass es zu mindestens einem Sieg kommt. Bestimmen Sie, wie viele Spiele mindestens gespielt werden müssen.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnen wird, wenn die Spieler so lange spielen, bis einer der beiden gewonnen hat.

1. a) $f'(x) = 2e^{2x}$ 1↓ $\Rightarrow f'(0) = 2$ 2↓ $\Rightarrow \varphi = 90^\circ - \arctan(2) \Rightarrow$ $\varphi = 26.565^\circ$ 3P

b) $V = \pi \cdot \int_{-\infty}^0 (e^{2x})^2 dx - V_{\text{Kegel}}$ 3↓; $\int_{-\infty}^0 (e^{2x})^2 dx = \int_{-\infty}^0 (e^{4x}) dx = \left[\frac{1}{4} e^{4x} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{4}$ +2P;

Nullstelle der Tangente = -0.5 $\Rightarrow h_{\text{Kegel}} = 0.5 \Rightarrow V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 0.5 = \frac{\pi}{6}$ +2P

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ $V = \frac{\pi}{12} \approx 0.2618$ 7P

c) $A(c) = \int_c^{c+1} (e^{2x} - x) dx$ 2↓ $\Rightarrow A'(c) = (e^{2(c+1)} - (c+1)) - (e^{2c} - c)$ 5↓

umständlicher: $A(c) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 \Big|_c^{c+1} = \dots \Rightarrow A'(c) = \dots$

$A'(c) = 0 : e^{2c+2} - e^{2c} - 1 = 0$ 6↓ $\Rightarrow e^{2c} \cdot e^2 - e^{2c} = 1 \Rightarrow (e^2 - 1)e^{2c} = 1$ 7↓

$\Rightarrow$ $c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e^2 - 1}\right) \approx -0.92729$ 8P

2. a) $f(-x) = \frac{2(-x)^2 - 4}{(-x)^2} = \frac{2x^2 - 4}{x^2} = f(x)$ 1↓ 2P

b) $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot u^2 \cdot |v|$ 1↓ $= \frac{1}{3} \pi \cdot u^2 \cdot \left| \frac{2u^2 - 4}{u^2} \right| = \frac{1}{3} \pi (4 - 2u^2)$ 2↓

$\Rightarrow V = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \pi (4 - 2u^2) \right)$ 3↓ $\Rightarrow$ $V = \frac{4\pi}{3}$ 4P

3. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 1↓

$f(1) = 0 : a + b + c + d = 0$ ① +1P; $f'(1) = 0 : 3a + 2b + c = 0$ ② +1P;

$f(-1) = -8 : -a + b - c + d = -8$ ③ +1P; $f'(-1) = 16 : 3a - 2b + c = 16$ ④ +1P

$\Rightarrow$ z. B. ① - ③ : $2a + 2c = 8$ und ② + ④ : $6a + 2c = 16$ 6↓

$\Rightarrow$ $a = 2, b = -4, c = 2, d = 0$ 8P bzw. $y = 2x^3 - 4x^2 + 2x$

4. $f(x) = \ln(x) + \ln(x^2) + \ln(x^3) + \dots + \ln(x^{100})$ 1↓ $= \ln(x) + 2\ln(x) + \dots + 100\ln(x) = \ln(x) \cdot (\dots$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1+2+3+\dots+100}{x}$ 3↓; $1+2+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2}$ +1P $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{5050}{x}$ 4P

5. a) $x^2 = \arccos(0) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533$ 1P

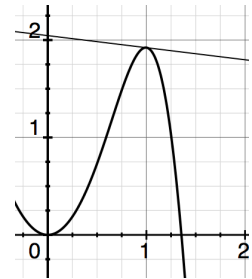
b) $A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} (\cos(x^2)) dx \approx \frac{1.25}{5} \left(\frac{\cos(0)}{2} + \cos(0.25^2) + \cos(0.5^2) + \cos(0.75^2) + \cos(1) + \frac{\cos(1.25^2)}{2} \right)$ 3↓
 $= 0.25(0.5 + 0.998 + 0.969 + 0.846 + 0.540 + 0.004) = 0.25 \cdot 3.857 = 0.964$ 4P

c) Weil die Kurve konkav ist (siehe Figur), schneiden die Trapeze einen Teil der Fläche ab. Also ist der Näherungswert zu klein. 2P (Genauer wäre $A \approx 0.9775$.)

d) $f'(x) = -2x \cdot \sin(x^2)$ 1↓ $\Rightarrow f''(x) = -2(\sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2))$ 2↓
 $f''(x_w) = 0: \sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2) = 0$ bzw. $n(x) = 0$ 3P

e) Die Tangente an den Graphen von $n(x)$ an der Stelle $x_1 = 1$ ist so flach, dass x_2 weit von der gesuchten Nullstelle entfernt wäre. Schätzung: $x_2 > 10$

(Eine Berechnung ergäbe $x_2 \approx 16.5$.) 3P



f) Nullstelle von n mit Hilfe des Rechners: $x_w \approx 1.3552, y_w = -0.2627$ 2P

6. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1↓ $\Rightarrow$ gleichschenkl.: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{121} = 11$ und

$\alpha = 90^\circ: \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = -36 + 18 + 18 = 0 \Rightarrow \Delta ABD \text{ rechtwinklig-gleichschenklig}$ 3P

b) $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C(1, 11, 11)$ 1P

c) $\varphi = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \arccos \frac{\left| \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{11 \cdot 1}$ 1↓ $\Rightarrow \varphi = 56.944^\circ$ (0.994rad) 3P

d) Z. B. $\vec{n}_{\varepsilon_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -77 \\ -66 \\ 66 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\vec{n}_{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 // \varepsilon_2}$ 2P

e) $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_1) = \frac{|7 \cdot 1 + 6 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 29|}{11} \Rightarrow \boxed{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2}$ 2P

f) $M = M_{BD}(1, 5.5, 5.5)$, $r = d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2 \Rightarrow \boxed{(x-1)^2 + (y-5.5)^2 + (z-5.5)^2 = 4}$ 2P

g) Richtung: $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$; Punkt: $\vec{b} + \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{2}{11} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ 3↓

$\Rightarrow$ Schnittgerade: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{91}{11} \\ \frac{34}{11} \\ \frac{87}{11} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ 4P (oder durch $(0, {}^{95}_{12}, {}^{37}_{12})$ etc.)

7. a) $9 \cdot 0 - 6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-10) + 14 = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Punkt } P \text{ liegt in der Ebene } \varepsilon.}$ 1P

b) $\varphi = \arcsin \frac{|\overrightarrow{PS} \circ \vec{n}_{\varepsilon}|}{|\overrightarrow{PS}| \cdot |\vec{n}_{\varepsilon}|} = \arcsin \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ 19 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{717} \cdot 11} \Rightarrow \boxed{\varphi = 55.2458^\circ}$ (0.964rad) 3P

c) Normale zu ε durch S : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschnitten mit ε : 1↓

$\Rightarrow 9(16+9t) - 6(-11-6t) + 2(9+2t) + 14 = 0 \Rightarrow 121t + 242 = 0$ 2↓

$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow \boxed{M(-2, 1, 5)}$ 4P

d) Richtungsvektor der Tangente $= \overrightarrow{PM} \times \vec{n}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 139 \\ -6 \end{pmatrix}$ 1↓ 2↓

Tangente: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 94 \\ 139 \\ -6 \end{pmatrix}$ 3P

8. a)

S	0	1	2	3
P	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$	$3 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$

2↓

$\Rightarrow E(X) = 0 + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow E(X) = 1.8$ 3P

$E(X^2) = 0 + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} = 3.8 \Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3.8 - 1.8^2 = 0.56$

$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.56} \Rightarrow \sigma(X) = 0.7483$ +2P

b) $\mu = 100 \cdot 1.8 = 180$; $\sigma = \sqrt{100} \cdot 0.7483 = 7.483$ 2↓ $\Rightarrow \mu - 2\sigma = 165.03$

$\Rightarrow 160 < 165.03 \Rightarrow$ 160 ist aussergewöhnlich, also nicht „normal“. 3P

c) Ohne Zurücklegen bedeutet: Nach jeder schwarzen Kugel steigt die Wahrscheinlichkeit für rot und umgekehrt. Die Resultate sind also ausgeglichener, d.h. weniger gestreut als beim Zurücklegen. Wenn zurückgelegt würde, wäre μ immer noch 1.8, aber es wäre z. B. $P(S=3) = 0.6^3 = 0.216$ statt nur 0.167.

$\Rightarrow$ σ wäre grösser beim Ziehen mit Zurücklegen. 2P

(Berechnung: Binomialverteilung $\sigma = \sqrt{300 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 8.485 > 7.483$)

d) Siehe a): $P(B) = \frac{1}{30} + \frac{3}{10} \Rightarrow$ $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{3}, P(\text{unentschieden}) = \frac{1}{2}$ 1P

e) $P(1. \text{ Kugel schwarz / B gewinnt}) = \frac{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P = \frac{3}{10}$ 2P

f) Binomial $B_{20, \frac{1}{6}}(X \geq 4)$ 1↓ $= 1 - B_{20, \frac{1}{6}}(X \leq 3)$ oder $B_{20, \frac{5}{6}}(X_B \leq 16)$ $\Rightarrow$ $P = 0.43345$ 3P

g) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.999999$ 1↓ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.000001$ log(...) 2↓ $\Rightarrow n > 19.93$

$\Rightarrow$ A und B müssen mindestens 20 Spiele spielen. 3P

h) $P = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$ 2P

Notenskala und Resultate – Maturitätsprüfung 2016 – Klasse 4g MN – Mathematik											
Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1.0
Anzahl Punkte	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	0
Anzahl SchülerInnen	2	2	4	2	3	4	1	2	1	0	0