KANTONSSCHULE IM LEE
WINTERTHUR

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2013

Klasse: **4f**

Profil: M

Lehrperson: Rolf Kleiner

MATHEMATIK

Zeit: 3 Stunden

Erlaubte Hilfsmittel: Grafiktaschenrechner ohne CAS, beliebige Formelsammlung

Bemerkungen: Die Prüfung enthält 7 Aufgaben mit 100 Punkten.

Lösen Sie jede Aufgabe auf ein separates A4-Blatt.

Schreiben Sie Ihre Lösungswege klar nachvollziehbar auf.

Geben Sie numerische Ergebnisse exakt an, ausser wenn es ausdrücklich nicht verlangt wird. Andernfalls runden Sie sinnvoll.

---

1. [7P] Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{3-2x}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie Ausdrücke für die erste und zweite Ableitung von f. Stellen Sie eine Vermutung auf für einen Ausdruck für die n-te Ableitung von f.

b) Bestimmen Sie *Gleichungen* für die beiden Asymptoten von f.

2. [8P] Gegeben ist die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen dem Graphen von f, der positiven x-Achse und $x=3$ wird um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie einen exakten Ausdruck für das Volumen des Rotationskörpers.

b) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die x-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen von f mit der Kurve von $y=\ln(x)$, indem Sie einen Schritt des Newtonverfahrens mit einem geeigneten Startwert durchführen.

3. [11P] Gegeben ist die Polynomfunktion $f(x) = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$.

a) Bestimmen Sie eine Geradengleichung für die Tangente an den Graphen von *f* im Punkt $P(-2\ ,\ f(-2))$.

Im Nullpunkt wird eine weitere Tangente *t* an den Graphen von *f* gelegt. Diese Tangente hat die Gleichung $y = 2x$. Sie schneidet den Graphen in einem weiteren Kurvenpunkt *Q*.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Tangente *t* mit dem Graphen von *f* im Punkt *Q*.

c) Bestimmen Sie (mit Hilfe einer Stammfunktion) den exakten Inhalt der Fläche, welche vom Graphen von *f* und der Tangente *t* eingeschlossen wird.

4. [26P] Von einer Pyramide mit Grundfläche *ABC* und Spitze *D* sind die Eckpunkte $A(-2,3,4)$, $B(4,-1,5)$, $C(1,-2,0)$ und $D(-6,-9,9)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Grösse des Winkels α im Dreieck *ABC*.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene *ABC*.

c) Es sei *F* der Fusspunkt der Höhe von der Spitze *D* auf die Grundfläche *ABC* der Pyramide. Bestimmen Sie die Koordinaten von *F*.

d) Die Gerade $g = (AD)$ wird an der Ebene *ABC* gespiegelt. Bestimmen Sie eine Gleichung für die gespiegelte Gerade g'.

e) Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide *ABCD*.

f) $M(-2,-4,z)$ ist Mittelpunkt einer Kugel. Bestimmen Sie den Wert von *z* so, dass die Punkte *A* und *B* auf der Oberfläche der Kugel liegen, und geben Sie eine Gleichung für diese Kugel. Überprüfen Sie auch, ob es sich bei dieser Kugel um die Umkugel der Pyramide handelt oder nicht.

5. [10P] Wolfgang Amadeus Mozart schrieb ca. 1787 eine *"Anleitung ... mit Würfeln zu componiren, so viele man will, ohne musikalisch zu seyn, noch etwas von der Composition zu verstehen"*. Mozart hat für dieses „musikalische Spiel“ zur Herstellung von Menuetten für jeden der 32 Takte eines solchen Menuetts eine spezielle Liste von Auswahlmöglichkeiten notiert.
Bei den ersten 16 Takten (Teil A) gibt es 11 Möglichkeiten für jeden Takt.
Bei den nachfolgenden 16 Takten (Teil B) gibt es 6 Möglichkeiten für jeden Takt.

a) Zeigen Sie, dass man auf diese Art nicht (wie Mozart schreibt) *“so viele man will“* verschiedene Menuette komponieren kann, sondern „nur“ ca. 130 Quadrilliarden.

Zwei Freundinnen komponieren gemäss Mozarts Anleitung nach dem Zufallsprinzip je ein Menuett und vergleichen die Takte ihrer beiden Menuette paarweise: die beiden ersten Takte, die beiden zweiten etc. Nun zählen sie, in wie vielen Paaren von Takten sie dieselbe Möglichkeit gewählt haben.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den ersten 16 Paaren von Takten (Teil A) *genau* 3 solche Paare gibt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es unter den 16 Paaren von Takten des *zweiten* Teils (B) *mindestens* 7 solche Paare gibt.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es unter allen 32 Paaren von Takten kein einziges solches Paar gibt.

6. [17P] Bei einem Quiz werden nacheinander so viele Fragen gestellt, bis die erste Antwort falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit, die n-te Frage richtig zu beantworten beträgt 0.9^n. Das Preisgeld bei genau n richtig beantworteten Fragen beträgt CHF $100 \cdot n$.

a) Mit der Zeit werden die Fragen so schwierig, dass die Wahrscheinlichkeit, die n-te Frage richtig zu beantworten, kleiner als ein Millionstel wird. Bestimmen Sie mit Hilfe einer exakten Berechnung den kleinsten solchen Wert für n.

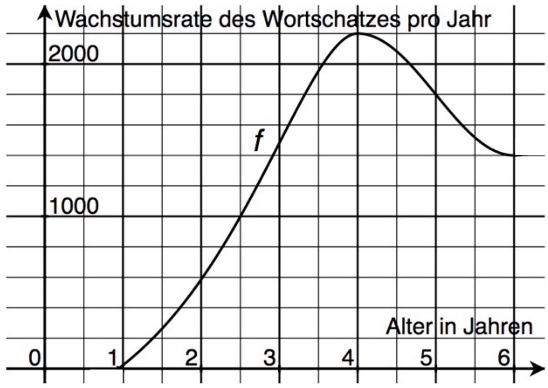
b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, nur die erste Frage richtig zu beantworten (d.h. danach die zweite falsch zu beantworten), 0.171 beträgt.

c) Bestimmen Sie das erwartete Preisgeld unter der Annahme, dass nach höchstens zwei Fragen der Quiz abgebrochen wird. Bestimmen Sie in diesem Fall auch, ob Nichts-gewinnen (CHF 0) gemäss der $\mu \pm 2\sigma$-Faustregel als ungewöhnliches Ereignis gelten sollte oder nicht.

d) Schreiben Sie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, mindestens n Fragen hintereinander richtig zu beantworten. Zeigen Sie, dass sich dieser Ausdruck in die Form $0.9^{\left(\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n\right)}$ verwandeln lässt.

7. [21P] Die Funktion f beschreibt die durchschnittliche Wachstumsrate pro Jahr des Wortschatzes von Kindern im Alter von 1 bis 6 Jahren (siehe Graph).

a) Benutzen Sie den Graphen, um zu bestimmen, wie viele neue Wörter *pro Tag* ein Kind im Alter von 3 Jahren ungefähr dazu lernt.



b) Zeigen Sie mit Hilfe der Parabelmethode (Simpson) und 6 Teilintervallen, dass der Wert von $\int_1^4 f(t)\,dt$ ungefähr 3200 beträgt, und erklären Sie die Bedeutung dieses Werts. (Lesen Sie die Funktionswerte grob aus dem Graphen ab.)

c) Erklären Sie (ohne Berechnung) mit Hilfe des Graphen von f und mathematischen Fachbegriffen, warum der Wortschatz für $1 \le t \le 6$ monoton wächst.

Für die Funktion f gilt: Die Anzahl neu erworbener Wörter pro Jahr beträgt im Alter $1 \le t \le 4$ Jahre ca. $1000 \cdot (5-t) \cdot e^{t-3} + 2200 - 1000\,e$ und im Alter $4 \le t \le 6$ Jahre ca. $400 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(t-3)\right) + 1800$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe exakter Berechnungen (inklusive Ableitungen), dass die Funktion für $t = 4$ sowohl stetig als auch differenzierbar ist.

e) Gehen Sie davon aus, dass ein Kind an seinem ersten Geburtstag noch keine Wörter kennt. Schreiben Sie einen Ausdruck mit Integralen für den durchschnittlichen Wortschatz am 5. Geburtstag, und werten Sie diesen Ausdruck mit Hilfe Ihres Taschenrechners aus.

1. **a)** $\boxed{f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}}$ 2↓ $\Rightarrow$ $\boxed{f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}}$ 3↓ $\Rightarrow$ $\boxed{f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$ 4P

b) $\boxed{\text{horizontale Asymptote: } y=2,\ \text{vertikale Asymptote: } x=1}$ 3P

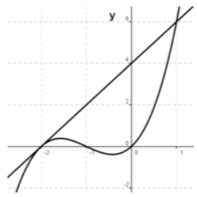
---

2. **a)** $V=\pi\int_3^\infty\left(\frac{1}{x}\right)^2dx$ 2↓ $=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_3^\infty$ 3↓ $\Rightarrow$ $\boxed{V=\frac{\pi}{3}}$ 4P

b) $\ln(x)-\frac{1}{x}=0$ 1↓ $\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\dfrac{\ln(x_n)-\frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}$ 3↓ , $\boxed{\text{z.B. } x_1=2 \Rightarrow x_2=1.74}$ 4P (1.76)

---

3. **a)** $f'(x)=3x^2+6x+2 \Rightarrow f'(-2)$ 1↓ $=2 \Rightarrow$ Tangente: $\boxed{y=2x+4}$ 3P



b) $x^3+3x^2+2x=2x \Rightarrow x=0,\ x=-3$ 2↓ $\Rightarrow f'(-3)=11$,

$(Q(-3,-6)) \Rightarrow \varphi=\arctan(11)-\arctan(2)=$ $\boxed{21.37°}$ 4P

c) $\int_{-3}^{0}\left(\left(x^3+3x^2+2x\right)-(2x)\right)dx$ 2↓ $=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{-3}^{0}$ 3↓ $=$ $\boxed{\frac{81}{12}=6.75}$ 4P

---

4. **a)** $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix}$ 2↓ $\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{34}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{50}}\approx 0.66$ 4↓ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha=48.66°}$ 5P

b) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}21\\27\\-18\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}7\\9\\-6\end{pmatrix}$ 2↓ $\Rightarrow$ Ebene ABC: $\boxed{7x+9y-6z+11=0}$ 4P

c) Durchstosspunkt von Höhe $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-9\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}7\\9\\-6\end{pmatrix}$ 1↓ durch Ebene ABC:

$7\cdot(-6+7t)+9\cdot(-9+9t)-6\cdot(9-6t)+11=0$ 2↓ $\Rightarrow t=1 \Rightarrow$ $\boxed{F\,(1,0,3)}$ 3P

d) Spiegelpunkt D' (siehe **c)**) mit $t=2$: $D'(8,9,-3)$ 2↓ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\6\\-7\end{pmatrix}}$ 3P

e) Volumen $V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$, $G=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{53}\sqrt{50}\cdot\sin(48.66°)\approx 19.3261$

oder $G=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{166}$ 2↓ , $h=\left|\overrightarrow{FD}\right|=\sqrt{166}$ +1P $\Rightarrow$ $\boxed{V=83}$ 4P

f) $\overline{AM}=\overline{BM}$: $0+49+(z-4)^2=36+9+(z-5)^2$ 2↓ $\Rightarrow$ $\boxed{z=2.5}$ 3P ,

$r^2=51.25 \Rightarrow$ $\boxed{K:(x+2)^2+(y+4)^2+(z-2.5)^2=51.25}$ +2P ;

$\overline{CM}^2=19.25\neq 51.25$ oder $\overline{DM}^2=83.25\neq 51.25 \Rightarrow$ $\boxed{K \text{ nicht Umkugel}}$ +2P

---

5. a) $11^{16}\cdot 6^{16} = 1.296\cdot 10^{29} \approx$ $\boxed{\text{130 Quadrilliarden}}$ 2P

b) Binomialverteilung mit $n=16,\ p=\frac{1}{11}$ 2↓ $\Rightarrow P(X=3) = \boxed{0.12187}$ 3P

c) Binomialverteilung mit $n=16,\ p=\frac{1}{6}$: $P(X\geq 7)=1-P(X\leq 6)$ 2↓ $= \boxed{0.01007}$ 3P

d) $\left(\frac{10}{11}\right)^{16}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{16} = \boxed{0.01177}$ 2P

---

6. a) $0.9^n < 10^{-6}$ 1↓ $\Rightarrow\ n > \frac{\log(10^{-6})}{\log(0.9)}$ 2↓ $= 131.12 \Rightarrow \boxed{n = 132 \text{ Fragen}}$ 3P

b) $P = 0.9\cdot(1-0.9^2) = \boxed{0.171}$ 2P

c) $E(X) = 0\cdot 0.1 + 100\cdot 0.171 + 200\cdot 0.9^3$ 3↓ $=162.90 \Rightarrow \boxed{\text{Preisgeld CHF 162.90}}$ 4P

$E(X^2) = 30'870 \Rightarrow V(X) = 30'870 - 162.90^2 = 4333.59 \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 65.83$ 3↓

$E(X) - 2\cdot\sigma(X) = 31.24 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Preisgeld 0 ist ungewöhnlich.}}$ +5P

d) $0.9^1\cdot 0.9^2\cdot 0.9^3\cdot\ldots\cdot 0.9^n$ 1↓ $= 0.9^{\sum_{k=1}^{n} k}$ 2↓ $= 0.9^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$ $\boxed{0.9^{\left(\frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{2}\cdot n\right)}}$ 3P

---

7. a) Aus Graph: ca. 1500 Wörter pro Jahr (1481.7) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ca. 4 Wörter pro Tag}}$ 2P

b) $\frac{4-1}{3\cdot 6}\cdot(0+4\cdot 250+2\cdot 600+4\cdot 1000+2\cdot 1500+4\cdot 1950+2200)$ 3↓ $= \boxed{3200}$ 4P

Zwischen dem 1. und dem 4. Geburtstag eines Kinds wächst der Wortschatz durchschnittlich um ca. 3200 Wörter. +2P

c) Die Funktion f ist die Ableitung des Wortschatzes. Weil die Funktionswerte von f für $1\leq t\leq 6$ positiv sind, ist der Wortschatz (Stammfunktion von f) wachsend. 2P

d) $f_{\text{links}}(4) \overset{?}{=} f_{\text{rechts}}(4)$: $1000\cdot(5-4)\cdot e^{4-3} + 2200 - 1000e = 400\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(4-3)\right) + 1800$ 2↓

$\Rightarrow 1000e + 2200 - 1000e = 400\cdot 1 + 1800 \Rightarrow 2200 = 2200 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ stetig für } t=4}$ 3P

$1\leq t\leq 4$: $f'(t) = -1000\cdot e^{t-3} + 1000(5-t)\cdot e^{t-3}$ 2P $= 1000(4-t)\cdot e^{t-3} \Rightarrow f'_{\text{links}}(4) = 0$,

$4\leq t\leq 6$: $f'(t) = 400\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(t-3)\right)$ 1P $\Rightarrow f'_{\text{rechts}}(4) = 400\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ ist differenzierbar für } t=4}$ +4P

e) $\int_1^4 1000\cdot(5-t)\cdot e^{t-3} + 2200 - 1000e\,dt + \int_4^5 400\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}(t-3)\right) + 1800\,dt$ 2↓

$= 3205.04 + 2054.65 \Rightarrow$ $\boxed{\text{ungefähr 5260 Wörter}}$ 4P

Notenskala und Resultate – 4f M – Sommer 2013											
Note	**6**	**5.5**	**5**	**4.5**	**4**	**3.5**	**3**	**2.5**	**2**	**1.5**	**1.0**
Punktzahl	80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	0
Anzahl MaturandInnen	1	2	2	1	5	2	3	3	1	0	0