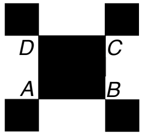
Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

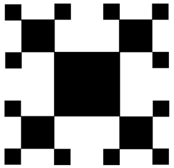
- Zeit: 3 Stunden für 7 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten
- Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner, beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
- Jede der sieben Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen

---

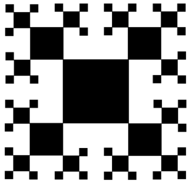
1. [4P] Einem Quadrat *ABCD* mit Seitenlänge 1 cm sind in den Ecken kleine Quadrate angehängt, deren Seitenlänge halb so lang ist. In weiteren Schritten werden nach demselben Prinzip in den freien Ecken der kleinsten Quadrate jeweils drei kleine Quadrate mit halber Seitenlänge angehängt (siehe Figuren F_1, F_2 und F_3).



Figur F_1



Figur F_2



Figur F_3

a) Bestimmen Sie, aus wie vielen Quadraten die Figur F_{10} besteht.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der gesamten, unendlich fortgesetzten Figur F_∞.

2. [6P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-kx^2}$, wobei $k > 0$.

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $1 \le x < \infty$.

b) Der Inhalt der Fläche aus Aufgabe **a)** mit $k = 1$ wird mit der Parabelmethode (Simpson) mit 6 Teilintervallen für $1 \le x \le 7$ angenähert. Berechnen Sie den prozentualen Fehler.

c) Mit 60 statt nur 6 Teilintervallen könnte die Annäherung aus Aufgabe **b)** verbessert werden. Begründen Sie ohne weitere Berechnungen, ob eine Ausweitung des Intervalls auf [1,61] oder eine feinere Unterteilung des Intervalls [1,7] mit $\Delta x = 0.1$ zum besseren Resultat führen würde.

3. [6P] Die Aussentemperatur eines Hauses während eines Kalendertags ist gegeben durch die Funktion $T(t) = 27 - 7 \cdot cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot (t-4)\right)$, $0 \le t \le 24$, wobei T in Grad Celsius und t in Stunden gemessen wird.

a) Berechnen Sie $\frac{1}{6-1} \cdot \int_1^6 T(t)\, dt$ exakt (ohne Taschenrechner) und interpretieren Sie Ihr Resultat als Temperatur.

b) Sobald die Aussentemperatur 30°C übersteigt, setzt eine Klimaanlage ein, deren Betrieb 0.20 Fr pro Stunde für jedes Grad über 30°C kostet. Benutzen Sie Ihren Grafiktaschenrechner, um die Kosten für die 24-Stunden-Periode zu berechnen.

4. [9P] Die Cheopspyramide (eine gerade, quadratische Pyramide) wird so in ein Koordinatensystem gelegt, dass der Mittelpunkt der Grundfläche *ABCD* bei $(0,0,0)$, die Ecke *A* bei $(115,115,0)$ und die Spitze *S* bei $(0,0,150)$ liegt.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Mittelnormalebene von *AS*.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von zwei <u>Seiten</u>flächen, indem Sie Normalenvektoren der Seitenebenen benutzen.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Umkugel der Pyramide.

5. [8P] Durch die Gleichung $x + (a-2) \cdot y + (2a+1) \cdot z + (2a-5) = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist eine Ebenenschar E_a definiert.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung für diejenige Ebene der Ebenenschar, welche durch den Punkt $P(21,0,0)$ geht.

b) Die Ebenen der Ebenenschar haben vom Punkt $Q(6,3,-1)$ den Abstand d.
Bestimmen Sie einen vereinfachten Ausdruck für den Abstand $d(a)$.

c) Bestimmen Sie exakt (ohne Taschenrechner) denjenigen Wert von a, für welchen der Abstand d aus Aufgabe **b)** maximal und für welchen er minimal wird.

6. [8P] Man betrachte Grossfamilien mit n Kindern, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges gewähltes Kind ein Mädchen oder ein Junge ist, je 50% betrage.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer Grossfamilie mit $n = 10$ Kindern mindestens drei Kinder von jedem Geschlecht hat.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es - bei n Kindern - von jedem Geschlecht mindestens zwei Kinder hat, $1 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$ beträgt.

c) Bestimmen Sie, wie viele Kinder zu einer Grossfamilie gehören müssen, damit die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe **b)** mindestens 0.999 beträgt.
Führen Sie dazu eine passende Funktion ein, so dass die Nullstelle dieser Funktion zur Lösung führt, und ermitteln Sie dann die Nullstelle mit Hilfe Ihres Grafiktaschenrechners. Erklären Sie auch mit Hilfe eines Graphen, warum das Newtonverfahren zur Bestimmung dieser Nullstelle versagen würde, wenn der Startwert zu klein gewählt würde.

7. [9P] Beim Roulettespiel kann man auf die Zahlen 0, 1, 2 ... 36 setzen, welche alle mit derselben Wahrscheinlichkeit zur Gewinnzahl werden. Anna setzt bei jedem Spiel auf die ungeraden Zahlen. Wenn die Gewinnzahl tatsächlich ungerade ist, erhält sie den doppelten Einsatz ausgezahlt; sonst verliert sie ihren Einsatz.
Beim ersten Spiel setzt Anna 10 Fr. ein. Sie spielt (nur) so lange, bis sie zum ersten Mal gewinnt. Wenn sie verliert, verdoppelt sie beim nächsten Spiel den Einsatz.

a) Anna hat 70 Fr. Startkapital; so sind maximal 3 Spiele möglich. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von Annas Gesamtgewinn.

b) Zeigen Sie, dass bei maximal n Spielen (mit unlimitiertem Startkapital) der Erwartungswert des Gesamtgewinns $10 - 10 \cdot \left(\frac{38}{37}\right)^n$ beträgt.

c) Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe **b)**, um mit exakten algebraischen Methoden zu bestimmen, wie oft Anna spielen müsste, damit der erwartete Verlust etwa 30 Fr. würde, und wie gross in diesem Falle Annas Maximalverlust wäre.

Lösungen – Maturitätsprüfung Mathematik schriftlich Sommer 2010 – Klasse 4e MN

1. a) $a_1 = 5;\ a_{10} = 5 + 4\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + \ldots + 4\cdot 3^9$ 1↓ $= 5 + 4\cdot 3\cdot\frac{3^9-1}{3-1} = \boxed{118'097}$ 2P

b) $A = 1 + 4\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots$ 1↓ $= 1 + \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots\right] = 1 + \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \boxed{5}$ 2P

---

2. a) $\int_1^\infty xe^{-kx^2}\,dx = -\frac{1}{2k}\cdot e^{-kx^2}\Big|_1^\infty$ 1↓ $= -\frac{1}{2k}\cdot\left(0 - e^{-k}\right) = \boxed{\frac{1}{2ke^k}}$ 2P

b) $\frac{7-1}{3\cdot 6}\cdot\left(1\cdot e^{-1} + 4\cdot 2\cdot e^{-4} + 2\cdot 3\cdot e^{-9} + \ldots\langle\approx 0\rangle\right)$ 1↓ $\approx 0.1717 \Rightarrow \boxed{6.65\ \%}$ 2P

c) Eine Ausweitung auf [1,61] bringt keine Verbesserung, denn bereits $f(6)$ ist sehr klein ($\approx 10^{-15}$, siehe **b)**). $\boxed{\text{Besser: Intervall [1,6] mit n=60 und } \Delta x = 0.1}$ 2P

---

3. a) $\int_1^6 T(t)\,dt = \left[27t - \frac{84}{\pi}\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}(t-4)\right)\right]_1^6$ 1↓ $= 135 - \frac{42}{\pi}\cdot\left[\sqrt{2}+1\right]$ 2↓ ≈ 102.72

$\frac{1}{6-1}\cdot\int_1^6 T(t)\,dt = \boxed{27 - \frac{42}{5\pi}\cdot\left[\sqrt{2}+1\right] \approx 20.5\,°\text{C Durchschnittstemperatur 1-6 Uhr}}$ 3P

b) $\int_{11.69}^{20.31}\left(T(t) - 30\right)dt$ 2↓ $\approx 22.47 \quad 22.47\text{ h}\cdot 0.20\frac{\text{Fr}}{\text{h}} = \boxed{4.49\text{ Fr.}}$ 3P

---

4. a) $\vec{n}\,\|\,\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix}-115\\-115\\150\end{pmatrix} \Rightarrow$ z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}23\\23\\-30\end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon:\ 23x + 23y - 30z + d = 0$ 1↓

$M_{AS} = (57.5, 57.5, 75) \Rightarrow d = -395 \Rightarrow \boxed{\varepsilon:\ 23x + 23y - 30z - 395 = 0}$ 2P

b) $\overrightarrow{AB}\,\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AS}\,\|\begin{pmatrix}23\\23\\-30\end{pmatrix}$ 1↓ $\Rightarrow \vec{n}_{ABS} = \begin{pmatrix}0\\30\\23\end{pmatrix}$ 2↓; analog: $\vec{n}_{ADS} = \begin{pmatrix}30\\0\\23\end{pmatrix}$

$cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}0\\30\\23\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}30\\0\\23\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{30^2+23^2}\right)^2}$ 3↓ $= \frac{529}{900+529} \approx 0.37 \Rightarrow \boxed{\alpha = 68.27°} \Rightarrow$ 4P

c) $\overline{AM} = \overline{SM}$ mit $M(0,0,z)$ 1↓ $:\ 115^2 + 115^2 + z^2 = (150 - z)^2 \Rightarrow z = -\frac{79}{6}$ 2↓ $\approx$ -13.17

$r = \overline{SM} = 150 - z = \frac{979}{6} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{79}{6}\right)^2 = \left(\frac{979}{6}\right)^2} \approx 163.2^2 \approx 26'623$ 3P

---

5. a) $21 + 0 + 0 + (2a - 5) = 0$ 1↓ $\Rightarrow a = -8 \Rightarrow \boxed{x - 10y - 15z - 21 = 0}$ 2P

b) $d = \frac{6 + 3(a-2) - (2a+1) + (2a-5)}{\sqrt{1^2 + (a-2)^2 + (2a+1)^2}}$ 1↓ $\Rightarrow \boxed{d = \frac{|3a-6|}{\sqrt{5a^2+6}}}$ 2P

c) Minimum: Punkt Q hat Abstand $d = 0$ für $\boxed{a = 2}$ 1P

Maximum: $d' = \pm\frac{3\cdot\sqrt{5a^2+6} - (3a-6)\cdot\frac{10a}{2\sqrt{5a^2+6}}}{5a^2+6}$ 1↓ $= 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{5}}$ 3P

---

6. a) $1 - P(\le 2\text{ M.}) - P(\le 2\text{ J.}) = 1 - 2\cdot\left[\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$ 1↓

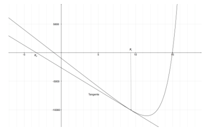
oder $1 - 2\cdot binomcdf(10, 0.5, 2)$ 1↓ $= 1 - 2\cdot 0.0547 = \boxed{\frac{57}{64} \approx 0.8906}$ 2P

b) $1 - 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ 1↓ $= 1 - 2(n+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{1 - \frac{n+1}{2^{n-1}}}$ 2P

c) $1 - \frac{n+1}{2^{n-1}} \ge \frac{999}{1000} \Rightarrow$ z.B. $f(n) = 2^{n-1} - 1000n - 1000 \ge 0$ 1↓ $\Rightarrow n \approx 14.96$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Mind. 15 Kinder in Grossfamilie}}$ 2P

Bei einem zu kleinem Startwert ($< x_{min} \approx 10.4$) führt das Newtonverfahren zur falschen Nullstelle bei $x \approx -1$. 2P



---

7. a) Verlust von 70 Fr. mit $p = \left(\frac{19}{37}\right)^3 \approx 0.135$ 1↓; Gewinn von 10 Fr. mit

$p = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^3 \approx 0.865 \Rightarrow E(X) = (-70)\cdot 0.135 + 10\cdot 0.864 = \boxed{-0.83\text{ Fr.}}$ 2P

$V(X) = \left[(-70)^2\cdot 0.135 + 10^2\cdot 0.864\right] - [-0.83]^2 \approx 749 \Rightarrow \boxed{\sigma(X) = 27.37\text{ Fr.}}$ 2P

b) $E(X) = \left(-10\cdot\left(2^n - 1\right)\right)\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^n + 10\cdot\left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^n\right)$ 1↓ $=$

$10 - \left(\frac{19}{37}\right)^n\cdot\left[-10\cdot 2^n + 10 - 10\right] = \boxed{10 - 10\cdot\left(\frac{38}{37}\right)^n\text{ Fr.}}$ 2P

c) $10 - 10\cdot\left(\frac{38}{37}\right)^n < -30 \Rightarrow 40 < 10\cdot\left(\frac{38}{37}\right)^n \ \Big|\ ln(\ldots)$ 1↓ $\Rightarrow n > \frac{ln(4)}{ln\left(\frac{38}{37}\right)} \approx 51.98$

$\Rightarrow \boxed{\text{Ca. 52 Spiele}}$ 2↓ $\Rightarrow \boxed{\text{Max. Verlust} = 10\cdot\left(2^{52} - 1\right) \approx 4.5\cdot 10^{16}\text{ Fr.}}$ 3P

Notenskala und Resultate – 4e MN – Sommer 2010

Noten	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1.0
Richtpunktzahl 4e MN	36	32.4	28.8	25.2	21.6	18	14.4	10.8	7.2	3.6	0
Anzahl Schüler	3	2	2	2	4	3	0	1	0	0	0