Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

Zeit: 3 Stunden für 7 Aufgaben mit insgesamt 50 Punkten
Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner, beliebige Formelsammlung
Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
Jede der sieben Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen

---

1. [3P] Eine Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{n!}$.

Bestimmen Sie **a)** a_4, **b)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ und **c)** $1002! \cdot \frac{a_{1001}}{a_{1000}}$.

2. [5P] Es gibt drei Geraden, die durch den Punkt $(0,0)$ gehen und den Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x$ rechtwinklig schneiden.

a) Zeigen Sie, dass die *x*-Koordinaten der Schnittpunkte Lösungen der Gleichung $3x^5 - 8x^3 + 5x = 0$ sind.

b) Bestimmen Sie Gleichungen für die drei Geraden.

3. [5P] Die Fläche, begrenzt durch die Kurve von $y = e^x$, die *x*-Achse, $x = 0$ und $x = 3$, wird um die x-Achse rotiert. Der so entstehende Rotationskörper wird durch eine Ebene senkrecht zur *x*-Achse in zwei volumengleiche Teile zerlegt. Diese Ebene kann durch die Gleichung $x = c$ beschrieben werden. Berechnen Sie den Wert von *c* exakt.

4. [13P] Gegeben sind die Ebene *ABC* mit $A(5,7,2)$, $B(1,9,1)$ und $C(3,11,3)$ sowie die Kugel *k*: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-11)^2 = 150$.

a) Eine Senkrechte zur Ebene *ABC* schneidet die Kugel in den Punkten $S(-2,7,6)$ und *T*. Bestimmen Sie die Länge der Strecke *ST*.

b) Zeigen Sie, dass die Kugel *k* die Ebene *ABC* im Punkt $P(8,2,1)$ berührt.

c) Eine Parallelebene zur Ebene *ABC* durch $Q(10,9,13)$ schneidet die Kugel in einem Kreis. Berechnen Sie den Radius dieses Kreises und geben Sie die Koordinaten des *Kreis*mittelpunkts an.

5. [7P] Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

a) Der Graph von *f* schneidet die Gerade $y = x$ in der Nähe des Punkts $(1,1)$. Bestimmen Sie einen Näherungswert für die *x*-Koordinate dieses Schnittpunkts, indem Sie *einen* (einzigen) Schritt des Newtonverfahrens durchführen.

b) Bestimmen Sie folgendermassen einen Näherungswert für $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$:

Wenden Sie für $1 \le x \le 7$ die Parabelmethode (Simpson) mit 6 Teilintervallen an. Benutzen Sie ab $x = 7$ die Annäherung $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \approx \frac{1}{x^2}$ und verwenden Sie zum Integrieren eine passende Stammfunktion.

6. [7P] Herr E verwaltet auf seinem Computer 100'000 Dateien. Er möchte sie so in Ordnern, Unterordnern, Unter-Unterordnern etc. ablegen, dass er sie möglichst schnell wieder findet. Dabei sei *x* die Anzahl Dateien pro Ordner, bzw. die Anzahl Unterordner pro Ordner.
Beispiel $x = 10$: Es gibt 10 Ordner auf "Ebene 1", welche je 10 Ordner auf "Ebene 2" enthalten. Insgesamt sind es 100 Ordner auf "Ebene 2", von welchen jeder 10 Ordner auf "Ebene 3" enthält usw. Auf "Ebene 4" befinden sich so 10'000 Ordner mit je 10 Dateien. Die 100'000 Dateien befinden sich also auf "Ebene 5". Bei $x = 10$ braucht es demnach fünf Mausklicks, bis die gewünschte Datei lokalisiert ist.
Im Folgenden müssen die Werte von *x* und der Anzahl "Ebenen" nicht ganzzahlig sein.

a) Zeigen Sie, dass bei allgemeinem *x* die Anzahl "Ebenen" $\frac{\ln(100'000)}{\ln(x)}$ beträgt.

Der Zeitbedarf, um von einer "Ebene" zur nächsten zu gelangen, setzt sich aus dem suchenden Lesen von Datei- oder Ordnernamen und dem Mausklick auf den gewünschten Datei- oder Ordnernamen zusammen. So ergibt sich als durchschnittlicher Zeitbedarf *Z* zum Lokalisieren einer gesuchten Datei $Z(x) = \ln(100'000) \cdot \frac{a \cdot x + b}{\ln(x)}$.

b) Zeigen Sie, dass die günstigste Anzahl *x*, welche den Zeitbedarf minimiert, der Lösung der Gleichung $a \cdot \ln(x) - a - \frac{b}{x} = 0$ entspricht.

c) Wir nehmen an, dass Herr E für das Lesen eines Namens 0.03 Sekunden benötigt, dass er durchschnittlich die Hälfte der *x* Namen einer "Ebene" lesen muss, bis er den gewünschten Namen findet, und dass er dann 1.5 Sekunden braucht, um mit der Maus auf diesen zu klicken und zur nächsten "Ebene" zu gelangen. Bestimmen Sie den theoretischen minimalen Zeitbedarf *Z* zum Lokalisieren einer Datei, indem Sie *a* und *b* bestimmen und die Gleichung in Teilaufgabe **b)** mit Hilfe Ihres Taschenrechners lösen.

7. [10P] Eine Lehrperson bestimmt die Note jedes der 23 Schüler und Schülerinnen der Klasse 4e folgendermassen: Zuerst wirft sie drei faire Würfel. Dann setzt sie den Durchschnitt der beiden höheren gewürfelten Zahlen als Note.

Beispiel: Gewürfelt wird 3, 1 und 6 $\Rightarrow$ Die Note beträgt $\frac{6+3}{2} = 4.5$.

Es resultieren folgende Wahrscheinlichkeiten:

Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Wahrscheinlichkeit			0.032	0.056	0.088	0.125	0.157	0.167	0.157	0.125	

a) Ergänzen Sie oben stehende Tabelle mit den fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie, wie viele "Viereinhalber" in der Klasse 4e zu erwarten sind.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 20 Schüler der Klasse 4e Noten zwischen 3 und 5 erhalten (d.h. Noten 3, 3.5, 4, 4.5 oder 5).

d) Bestimmen Sie den zu erwartenden Klassendurchschnitt der Klasse 4e.

e) Die Standardabweichung einer gewürfelten Note beträgt 1.11. Bekanntlich beträgt die Standardabweichung der Summe von *n* Noten das $\sqrt{n}$-fache. Erläutern Sie mit Hilfe von Überlegungen mit der Standardabweichung, ob ein Durchschnitt für die Klasse 4e von 3.9 als aussergewöhnliches Ereignis zu gelten hat oder nicht.

Ende Prüfung

Lösungen Maturitätsprüfung Mathematik schriftlich Sommer 2009 – Klasse 4eMN

1. **a)** $a_2 = 1;\ a_3 = \frac{1}{2};\ a_4 = \frac{\frac{1}{2}}{3!} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{12}}$ 1P,

b) $\boxed{0}$ 1P, **c)** $\frac{1002!}{1000!} = 1002 \cdot 1001 = \boxed{1'003'002}$ 1P $\Rightarrow$ Total: 3P

---

2. **a)** Schnittpunkt von $y = mx$ mit f: $mx = -x^3 + 2x \Rightarrow m = \frac{2x - x^3}{x}$ (1) 1P;

rechter Winkel: $m = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{-3x^2 + 2} \Rightarrow m = \frac{1}{3x^2 - 2}$ (2) 1P;

Vergleich von (1) und (2): $\frac{2x - x^3}{x} = -\frac{1}{-3x^2 + 2} \Rightarrow 3x^5 - 8x^3 + 5x = 0$ 3P

b) $x\left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 - 5\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^2 = 1,\ x^2 = \frac{5}{3}$ 1↓,

$\Rightarrow$ aus (2): $m = -\frac{1}{2},\ m = 1,\ m = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x\ ,\ y = x\ ,\ y = \frac{1}{3}x}$ 2P

---

3. $V = \pi \int_0^3 \left(e^x\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left[e^6 - 1\right] \approx 201.21\pi \approx 632.125$ 2↓, , $\pi \int_0^c \left(e^x\right)^2 dx = \frac{V}{2}$ +1P $\Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} \cdot \left[e^{2x}\right]_{x=0}^{c} = \frac{V}{2}$ +2P $\Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \left[e^{2c} - 1\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \left[e^6 - 1\right]$ 4↓ $\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^6 + 1}{2}\right) \approx 2.65}$ 5P

---

4. **a)** Ebene ABC: $x + y - 2z - 8 = 0$ oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2↓, $T\left(-2 + t, 7 + t, 6 - 2t\right)$ auf Kugel:

$\left(-5 + t\right)^2 + \left(10 + t\right)^2 + \left(-5 - 2t\right)^2 = 150$ 3↓ $\Rightarrow t = 0$ oder $t = -5$ 4↓

$\Rightarrow T\left(-7, 2, 16\right)$ und $\boxed{\overline{ST} = 5 \cdot \sqrt{6} \approx 12.25}$ 6P

b) z.B. $\vec{n}$ parallel zu $\overline{MP}$ und P in Ebene ABC und P auf k bzw. $\overline{PM} = r$ 3P

c) h = Abstand (Q, Ebene ABC) $= \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{6}$ $\left(= \frac{r_{Kugel}}{2}\right)$

$r_{Kreis} = \sqrt{r_{Kugel}^2 - h^2} = \sqrt{150 - \left(\frac{5}{2}\sqrt{6}\right)^2} \Rightarrow \boxed{r_{Kreis} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 10.6}$

M_{Kreis} als Schnittpunkt von Gerade durch M mit Richtung $\vec{n}$ und Parallelebene

(oder $M_{Kreis} = M_{MP}$, weil h = $\frac{r_{Kugel}}{2}$) $\Rightarrow \boxed{M_{Kreis}\left(5.5, -0.5, 6\right)}$ 4P

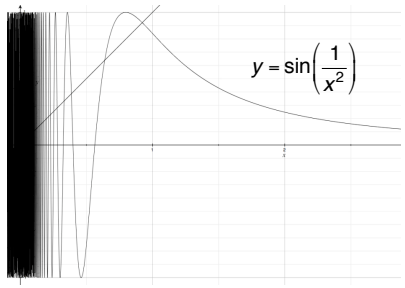
---

5. **a)** Newtonfunktion: $x - \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x - \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{-2}{x^3}}$ 1↓

z.B. $x_1 = 1\ ;\ x_2 = 1 - \frac{1 - \sin(1)}{1 - \cos(1) \cdot \frac{-2}{1}}$

$= \boxed{0.9238}$ 2P (genauer: 0.9226)



b) Simpson:

$\int_1^7 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \approx \frac{1}{3}\left(\sin 1 + 4\sin\frac{1}{4} + 2\sin\frac{1}{9} + 4\sin\frac{1}{16} + 2\sin\frac{1}{25} + 4\sin\frac{1}{36} + \sin\frac{1}{49}\right) =$

$\frac{1}{3} \cdot (2.51417) = 0.8381$ 2P (genauer: 0.8247);

$\int_7^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \approx \int_7^\infty \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=7}^{\infty} = 0 + \frac{1}{7} = 0.1429$ 2P (genauer: 0.142855);

$\Rightarrow \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = 0.8381 + 0.1429 = \boxed{0.981}$ 5P (genauer: 0.968)

---

6. **a)** $x = \sqrt[n]{100'000}$ 1↓ $\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{n} \cdot \ln(100'000) \Rightarrow n = \frac{\ln(100'000)}{\ln(x)}$ 2P

b) $Z'(x) = \ln(100'000) \cdot \frac{a \cdot \ln(x) - (ax + b) \cdot \frac{1}{x}}{\left(\ln(x)\right)^2} = 0$ 1↓ $\Rightarrow a \cdot \ln(x) - a - \frac{b}{x} = 0$ 2P

c) $a = 0.015,\ b = 1.5$ 1↓ $\Rightarrow x = 37.94$ 2↓ $\Rightarrow \boxed{Z = 6.55\ s}$ 3P (3.17 Ebenen)

---

7. **a)** Note 1: $\boxed{\frac{1}{216} = 0.0046}$, Note 1.5: $\boxed{\frac{3}{216} = 0.0139}$, Note 6: $\boxed{\frac{16}{216} = 0.0741}$ 2P

b) $23 \cdot 0.167 = 3.83 \Rightarrow$ $\boxed{4 \text{ "Viereinhalber"}}$ 1P

c) 1– cdfbin(23,0.694,19) = 1–0.9524 oder cdfbin(23,1–0.694,3) = $\boxed{0.0476}$ 3P

d) $E[X] = 1 \cdot 0.0046 + 1.5 \cdot 0.0139 + 2 \cdot 0.032 + \ldots + 6 \cdot 0.0741 = \boxed{4.229}$ $(= 4\frac{11}{48})$ 2P

e) $\sigma_{Klasse} = \frac{\sqrt{23}}{23} \cdot 1.11 = 0.23$, $4.23 - 3.9 \approx 0.33 \approx 1.4 \cdot \sigma_{Klasse} < 2\sigma_{Klasse} \approx 0.46$,

(oder $\sigma_{Summe} = \sqrt{23} \cdot 1.11 = 5.32$, $23 \cdot 4.23 - 23 \cdot 3.9 \approx 7.6 \approx 1.4 \cdot \sigma_{Summe} < 2\sigma$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ein Klassendurchschnitt von 3.9 ist nicht aussergewöhnlich.}}$ 2P

Notenskala und Resultate der Maturandinnen und Maturanden im Sommer 2009											
Noten	**6**	**5.5**	**5**	**4.5**	**4**	**3.5**	**3**	**2.5**	**2**	**1.5**	**1.0**
Richtpunktzahl 4e MN	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0
Anzahl Schüler	5	4	3	2	6	0	1	2	0	0	0