Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 7 Aufgaben mit 50 Punkten
- Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner, beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
- Jede der sieben Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen

---

1. [3P] Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion $f(x)=\frac{\cos(x)}{x-a}$ bei $x=\frac{\pi}{6}$ ein Extremum hat. (Minimum und Maximum muss nicht unterschieden werden.)

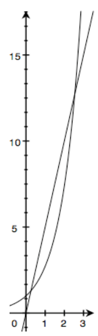
2. [3P] Mit einem fairen Würfel wird drei Mal gewürfelt. Dann werden die Zehnerlogarithmen der drei Augenzahlen multipliziert.
Beispiel: Gewürfelt wird 3, 2 und 6 $\Rightarrow$ Produkt: $(\log_{10} 3)\cdot(\log_{10} 2)\cdot(\log_{10} 6)=0.112$

a) Geben Sie das grösstmögliche Produkt als Dezimalzahl auf drei Ziffern genau.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt 0 ergibt.

3. [4P] Eine oben offene, quaderförmige Kiste soll einen quadratischen Boden und ein Volumen von 12 m^3 besitzen. Das Material für den Boden ist drei Mal so teuer wie dasjenige für die Seitenflächen. Bestimmen Sie die Kantenlänge des quadratischen Bodens und die Höhe der Kiste so, dass die Materialkosten möglichst niedrig werden.

4. [5P] Die Gerade $y=5x$ und die Kurve von $y=e^x$ schneiden sich in zwei Punkten. Einer der Schnittpunkte hat die Koordinaten $(2.54;12.71)$.



a) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die zweite Schnittstelle, indem Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens mit Startwert $x_1=0$ durchführen.

b) Die senkrechte Gerade $x=c$ halbiert das Flächenstück, welches von der Gerade und der Kurve eingeschlossen wird. Schreiben Sie eine Gleichung mit Integralen, mit welcher man c bestimmen könnte. (Sie müssen die Integrale nicht auswerten.)

5. [6P] Die von der Kurve $y=\sin(x)$ und der x-Achse zwischen $x=0$ und $x=\pi$ eingeschlossene Fläche wird um die x-Achse rotiert. Dadurch entsteht ein Rotationskörper mit Volumen V.

a) Schreiben Sie ein Integral, welches das Volumen V ausdrückt.

b) Bestimmen Sie einen Näherungswert für V bzw. für das Integral aus Aufgabe **a)** mit Hilfe der Parabelmethode (Simpson) für $n=4$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion den *exakten* Wert von V.
Tipp: Benutzen Sie die Formel $\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$.

6. [13P] Gegeben das Dreieck ABC mit $A(1;3;1)$, $B(9;3;3)$ und $C(9;0;2)$ und Punkt $S(0;-6;14)$.

a) Berechnen Sie die Grösse des Dreieckswinkels $\alpha = \sphericalangle BAC$ im Gradmass.

b) Berechnen Sie den Abstand des Punkts S von der Ebene ABC.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Kugel, deren Mittelpunkt auf der Geraden CS liegt und welche durch die Punkte A und B geht.

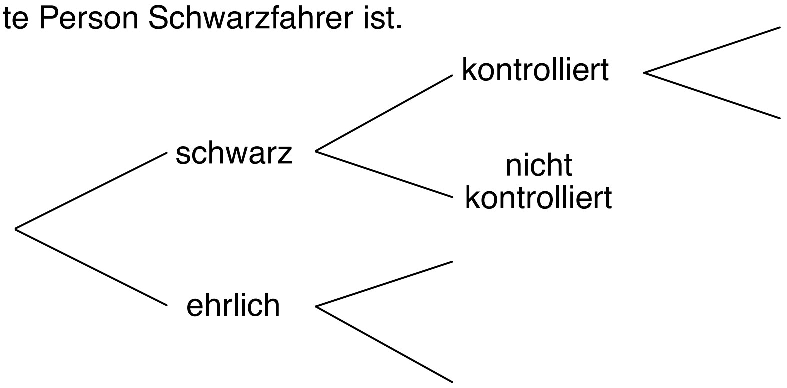
7. [16P] Gemäss Untersuchungen neigen ca. 5% der Zugfahrgäste zum Schwarzfahren.

a) Ein Zugabteil mit 50 Personen wird kontrolliert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Person eine Busse bezahlen muss.

Durch die Häufigkeit der Kontrollen kann der Schwarzfahreranteil beeinflusst werden. Die Regierung beschliesst, dass die Wahrscheinlichkeit, auf einer Fahrt kontrolliert zu werden, $p = 0.1$ betragen soll. Weiter wird angenommen, dass

- jede Person pro Tag eine Zugfahrt unternimmt,
- jeder zweite Schwarzfahrer, welcher erwischt wird, ehrlich wird, aber jeder hundertste ehrliche Fahrer zum Schwarzfahrer wird, wenn er an einem Tag nicht kontrolliert wird. (Die restlichen Personen verändern ihr Verhalten nicht.)

b) Ergänzen Sie das untenstehende Baumdiagramm und berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit, dass am Ende des Tages bzw. nach einer Fahrt eine zufällig gewählte Person Schwarzfahrer ist.



Über einen längeren Zeitraum hinweg lässt sich der Schwarzfahreranteil mit einer Folge (s_n) beschreiben, wobei $s_1 = 5\%$.

c) Zeigen Sie, dass $s_{n+1} = 0.009 + 0.941 \cdot s_n$.

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Resultats von Aufgabe **c)** den Wert von s_3 und den Grenzwert der Folge (s_n).

Tipp: Nehmen Sie in der Rekursionsgleichung an, dass für $n \to \infty$ gilt: $s_{n+1} \approx s_n$.

Die Zufallsgrösse X steht für die Einnahmen pro Fahrgast und Fahrt. X kann die Werte 2 Fr. (Einnahmen pro ehrlichen Fahrgast) oder 60 Fr. (Einnahmen pro kontrollierten Schwarzfahrer) oder 0 Fr. (nicht kontrollierter Schwarzfahrer) annehmen.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X bei einem Schwarzfahreranteil von 5% und Kontrollwahrscheinlichkeit $p = 0.1$.

f) Die Häufigkeit der Kontrollen bzw. p soll jetzt variabel sein (statt fix $p = 0.1$). Wie oben beschrieben wird sich der Schwarzfahreranteil einpendeln. Beschreiben Sie unter diesen Voraussetzungen (ohne weitere Berechnung), wie man p berechnen könnte, so dass die Einnahmen langfristig maximal würden.
Erläutern Sie auch die Unzulänglichkeiten dieses Vorgehens bzw. des oben beschriebenen Modells und zeigen Sie Alternativen auf.

1. $y' = \dfrac{-\sin(x)\cdot(x-a)-\cos(x)}{(x-a)^2}$ $\boxed{1\downarrow}$, $0 = -\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{6}-a) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{2\downarrow}$, $\boxed{a = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.2556}$ $\boxed{3P}$

---

2. **a)** maximales Produkt = $(\log_{10} 6)^3 \approx \boxed{0.471}$ $\boxed{1P}$

b) Produkt = 0, falls mindestens eine 1 $\boxed{1\downarrow}$:

$P(\text{Produkt} = 0) = 1 - P(\text{keine } 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \boxed{0.4213}$ $\boxed{2P}$

---

3. Oberfläche $S = x^2 + 4\cdot x\cdot h$ $\Rightarrow$ Zielfunktion Materialkosten $M(x) = 3\cdot x^2 + 4\cdot x\cdot h$ $\boxed{1\downarrow}$;

Nebenbedingung: $V = 12 = x^2\cdot h \Rightarrow h = \dfrac{12}{x^2} \Rightarrow M(x) = 3x^2 + \dfrac{48}{x}$ $\boxed{2\downarrow}$;

$M'(x) = 6x - \dfrac{48}{x^2} = 0$ $\boxed{3\downarrow}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Bodenkantenlänge } x = 2\,\text{m},\ \text{Höhe } h = 3\,\text{m}}$ $\boxed{4P}$

---

4. **a)** Newtonfunktion $f(x) = 5x - e^x \Rightarrow f'(x) = 5 - e^x \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{5x_n - e^{x_n}}{5 - e^{x_n}}$ $\boxed{2\downarrow}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 - \dfrac{0-1}{5-1} = 0.25 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0.2591565}$ $\boxed{3P}$ (genauer: 0.2591711)

b) $\boxed{\text{z.B. } \int_{0.259}^{c} (5x - e^x)\,dx = \int_{c}^{2.54} (5x - e^x)\,dx}$ $\boxed{2P}$ $(= 2.2886, \text{ mit } c = 1.506)$

---

5. **a)** Volumen $\boxed{V = \pi\cdot\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx}$ $\boxed{1P}$

b) Simpson: $V = \pi\cdot\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx \approx \pi\cdot\dfrac{b-a}{3n}\cdot(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$ $\boxed{1\downarrow}$

$= \pi\cdot\frac{\pi-0}{3\cdot 4}\cdot\left(0 + 4\cdot\sin^2(\frac{\pi}{4}) + 2\cdot\sin^2(\frac{\pi}{2}) + 4\cdot\sin^2(\frac{3\pi}{4}) + 0\right)$ $\boxed{2\downarrow}$ $= \frac{\pi^2}{2} = \boxed{4.9348}$ $\boxed{3P}$

c) $V = \pi\cdot\int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2x)\,dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)\right]_0^{\pi}$ $\boxed{1\downarrow}$ $= \pi\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - (0)\right] = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$ $\boxed{2P}$

---

6. **a)** $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{8\cdot 8 + 0\cdot(-3) + 2\cdot 1}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{74}}$ $\boxed{2\downarrow}$ $\Rightarrow \boxed{\alpha = 21.5°}$ $\boxed{3P}$

b) Ebene ABC: $3x + 4y - 12z - 3 = 0$ $\boxed{2\downarrow}$ $\Rightarrow h = \left|\dfrac{3\cdot 0 + 4\cdot(-6) - 12\cdot 14 - 3}{13}\right|$ $\boxed{3\downarrow}$ $= \dfrac{195}{13}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Abstand (Punkt S, Ebene(ABC))} = 15}$ $\boxed{4P}$

c) $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; Gerade CS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Punkt M $(9+3t;\ 2t;\ 2-4t)$ 2↓

$\overline{AM} = \overline{BM}: \sqrt{(9+3t-1)^2 + (2t-3)^2 + (2-4t-1)^2} = \sqrt{(9+3t-9)^2 + (2t-3)^2 + (2-4t-3)^2}$

$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow M\ (3; -4; 10)$ 4↓ (oder mit Mittelnormalebene AB: $4x + z - 22 = 0$)

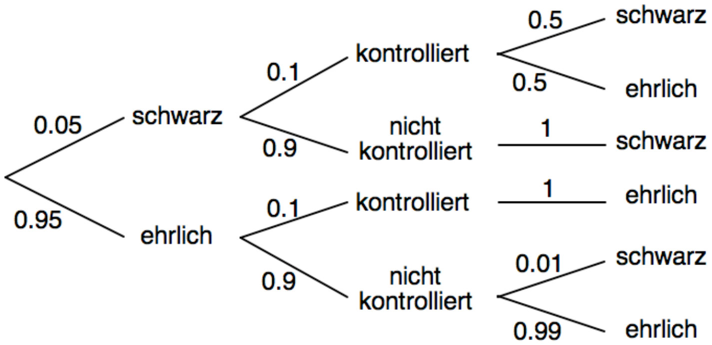
$r = \overline{AM} = \overline{BM} = \sqrt{134} \Rightarrow \Rightarrow$ $\boxed{\text{Kugel: } (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-10)^2 = 134}$ 6P

---

7. a) Binomialverteilung mit n=50, p=0.05 1↓ ; $B_{50,0.05}(X>1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - (0.95)^{50} - \binom{50}{1} \cdot (0.05)^1 \cdot (0.95)^{49} = 1 - 0.076945 - 0.202488 = \boxed{0.72057}$ 3P

b)



P(schwarz) =
$(0.05)\cdot(0.1)\cdot(0.5) +$
$(0.05)\cdot(0.9) +$
$(0.95)\cdot(0.9)\cdot(0.01) =$
$\boxed{0.05605}$ 3P

c) im Baumdiagramm: s_n statt 0.05: $s_{n+1} = s_n \cdot (0.1)\cdot(0.5) + s_n \cdot (0.9) + (1 - s_n)\cdot(0.9)\cdot(0.01)$

$\Rightarrow \boxed{s_{n+1} = 0.009 + 0.941 \cdot s_n}$ 2P

d) $s_1 = 0.05 \Rightarrow s_2 = 0.009 + 0.941 \cdot 0.05 = 0.05605$ (vgl. **a)**) $\Rightarrow$ $\boxed{s_3 = 0.061743}$ 1P

für $n \to \infty$: $s_n \approx 0.009 + 0.941 \cdot s_n \Rightarrow s_n \approx \dfrac{0.009}{1 - 0.941} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Grenzwert} = 0.1525}$ 1P

e)

X	2	60	0
P	0.95	0.005	0.045

$\Rightarrow$ $\boxed{E(X) = 2.20 \text{ Fr.}}$; $\boxed{Var(X) = 16.96}$ 3P

f) Grenzwert $s = \frac{1-p}{1+49p} \Rightarrow E(p) = \frac{-60p^2 + 160p}{49p+1}$; $E'(p) = 0 \Rightarrow p = 0.21$, $E_{max} = 2.74$ Fr.

Ausgaben für Kontrollen, psychologische Aspekte (Überwachungsstaat) etc. sind nicht berücksichtigt.

Das Modell ist unzureichend, z.B. weil Personen ihr Verhalten nicht schon nach einer Fahrt ändern (vor allem Schwarzfahrer werden nicht so schnell ehrlich).

Alternativen: Zeitraum und Anzahl Fahrten trennen etc. 3P

Notenskala und Resultate der Maturandinnen und Maturanden im Sommer 2007

Noten	**6**	**5.5**	**5**	**4.5**	**4**	**3.5**	**3**	**2.5**	**2**	**1.5**	**1.0**
Richtpunktzahl 4c N	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0
Anzahl Schüler	0	2	3	2	5	2	3	1	2	0	1
Richtpunktzahl 4e MN	42.5	38.25	34	29.75	25.5	21.25	17	12.75	8.5	4.25	0
Anzahl Schüler	1	8	1	2	1	0	1	1	1	0	0