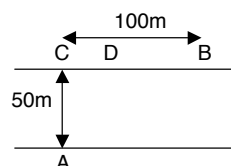


Maturitätsprüfung Mathematik schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 7 Aufgaben mit 50 Punkten
- Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner, beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben.
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben.
- Jede der sieben Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen.

1. [2P] Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$ an der (einzigen) Nullstelle von f .

2. [5P] Simon möchte möglichst schnell von seinem Standort A auf der einen Seite eines 50 m breiten (strömungslosen) Flusses zum Ort B auf der anderen Seite gelangen. B ist 100 m vom Punkt C entfernt, welcher dem Punkt A genau gegenüberliegt. Simon steht in A ein Ruderboot zur Verfügung, mit dem er eine Geschwindigkeit von 2 Metern pro Sekunde erreicht. Dem Ufer entlang - mit festem Boden unter den Füssen - ist er drei Mal so schnell unterwegs. Simon peilt also mit dem Boot einen Punkt D zwischen B und C an. Es sei x die Länge der Strecke CD [in Metern].



- a) Zeigen Sie, dass die benötigte Zeit t [in Sekunden], um von Punkt A via Punkt D den Punkt B zu erreichen $\frac{1}{6}(3\sqrt{x^2 + 2500} - x + 100)$ beträgt.
- b) Benutzen Sie das Resultat von Aufgabe a) und Differentialrechnung, um die *kürzeste Zeit* zu bestimmen, in welcher Simon von A nach B gelangen kann.

3. [10P] Gegeben die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$.

- a) Zeigen Sie sorgfältig mit Hilfe von Ableitungen, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2x + 7$ eine Tangente an den Graphen der Funktion f ist.

Der Graph der Funktion f , die x -Achse sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = n$ und $x = n+1$ (wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A_n . Die Flächeninhalte $A_2, A_3, A_4, \dots$ bilden die Glieder einer Zahlenfolge.

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2 , indem Sie mit dem Taschenrechner ein geeignetes Integral auswerten.
- c) Zeigen Sie, dass die Bildungsvorschrift dieser Folge lautet: $A_n = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n(n-1)}$
- d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (A_n) und erklären Sie dessen Bedeutung anhand einer Skizze des Graphen der Funktion f .

Bitte wenden

4. [6P] Die Funktion f ordnet der Zeit t die Abflussmenge y eines Bachs in Kubikmetern pro Stunde $[\frac{m^3}{h}]$ zu. Die Tabelle enthält die Messresultate einer 24-Stunden-Periode.

t [h]	0	3	6	9	12	15	18	21	24
$y=f(t)$ $[\frac{m^3}{h}]$	9.6	9.8	10.4	11.2	11.4	11.3	10.6	10.0	9.7

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Parabelmethode (Simpson) den Wert von $\int_0^{24} f(t) dt$.

Benutzen Sie $n = 4$ Teilintervalle (nicht $n = 8$), und erklären Sie in einem Satz die Bedeutung Ihres Resultats in Bezug auf die Abflussmenge.

- b) Die Funktion $f(t)$ wird durch die Funktion $g(t)$ angenähert, wobei $G(t) = -3.44 \cdot \sin(0.262t) + c \cdot t$ eine Stammfunktion von $g(t)$ ist.

Berechnen Sie c und bestimmen Sie einen Ausdruck für $g(t)$ so, dass die Annäherung möglichst gut ist.

5. [13P] Pyramide ABCS hat die Ecken $A(1; 2; 1)$, $B(-1; 5; 2)$, $C(-3; 1; 3)$ und $S(3; 7; -3)$.

- a) Berechnen Sie die Länge der Höhe von der Spitze S auf die Grundfläche ABC.
- b) Zeigen Sie, dass der Fusspunkt der Höhe aus Aufgabe a) ausserhalb der Grundfläche ABC liegt.

Der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC hat die Koordinaten $U(-1.2; 2.5; 2.1)$.

- c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Geraden SU und der Grundfläche ABC.
- d) $M(u; v; w)$ sei der Mittelpunkt der Umkugel der Pyramide ABCS mit Radius r . Schreiben Sie ein Gleichungssystem, welches geeignet ist, M zu bestimmen.

Statt das Gleichungssystem zu lösen, benutzen Sie nun $r = \frac{\sqrt{486}}{2}$ und den Punkt U, um eine Gleichung für die Umkugel der Pyramide ABCS zu bestimmen.

6. [8P] Von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ werden nacheinander sechs Vektoren gezogen, wobei bei jedem Zug jeder der drei Vektoren mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass lauter Vektoren $\vec{c}$ gezogen werden.
- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Mal $\vec{c}$ gezogen wird.

Nun wird der Summenvektor $\vec{s}$ aller sechs gezogenen Vektoren gebildet.

Man weiss, dass $\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$ und dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht parallel und nicht $\vec{0}$ sind.

- c) Erklären Sie, unter welchen Bedingungen der Vektor $\vec{s}$ parallel zum Vektor $\vec{c}$ ist.
- d) Erklären Sie, unter welcher Bedingung der Vektor $\vec{s}$ der Nullvektor ist, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür.

7. [6P] Von insgesamt 596 Panini-Bildern hat Alex bereits 593 gesammelt und ins WM-Heft eingeklebt. In der Hoffnung, die letzten drei Bilder zu ergattern, kauft er sich 50 weitere Bilder. Wir nehmen an, dass jedes der 596 Bilder gleich häufig vorkommt und dass unter den 50 Bildern einzelne Bilder mehrfach vorkommen können. Die Zufallsgrösse X gibt an, wie viele von den drei Lücken in Alex' WM-Heft gefüllt werden.

- a) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in untenstehender Tabelle.

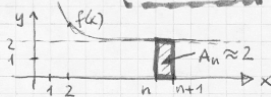
Anzahl "nützliche" Bilder	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit			0.0176	0.0005

- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . (Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, schätzen Sie die fehlenden Werte.)

Ende Prüfung

1. $f' = e^x \cdot \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}$; Nullstelle bei $x=1$; $f'(1) = e^1 \cdot \ln(1) + e^1 \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow$ Steigung = e 2P

2) a) $t = \frac{S}{v} = \frac{S_1}{v_1} + \frac{S_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + 50^2}}{2} + \frac{100-x}{6} = \frac{1}{6} \cdot (3\sqrt{x^2 + 2500} + 100 - x)$ 2
 b) $t'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{3 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + 2500}} - 1 \right] = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{3x - \sqrt{x^2 + 2500}}{\sqrt{x^2 + 2500}} \right] = 0$
 $(3x)^2 = (\sqrt{x^2 + 2500})^2 \Rightarrow 9x^2 = x^2 + 2500 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2500}{8}} = \frac{25}{2} \sqrt{2} \approx 17.68$
 kürzeste Zeit $t(x = \frac{25}{2}\sqrt{2}) = 10.237$ Sekunden 3

3) a) $m_1 = m_2 = -2$: $f'(x) = (-2) \cdot (x-1)^{-3} = -2 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^3} = 1 \Rightarrow x = 2$ 2
 $y_1(x=2) = y_2(x=2)$: $\frac{1}{(2-1)^2} + 2 = \frac{1}{(2-1)^2} + 2 \Rightarrow 3 = 3$ q.e.d. 3 P(2,3)
 b) $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2} + 2 dx = \left[\frac{1}{1-x} + 2x \right]_2^3 = \frac{1}{1-3} + 6 - \left(\frac{1}{1-2} + 4 \right) = -\frac{1}{2} + 6 - (-\frac{1}{2} + 4) = 2$ 2
 c) $\int_n^{n+1} (x-1)^{-2} + 2 dx = \left[\frac{1}{1-x} + 2x \right]_n^{n+1} = \left[\frac{1}{1-(n+1)} + 2(n+1) \right] - \left[\frac{1}{1-n} + 2n \right] = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + 2 = \frac{-(n-1) + n + 2n(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n(n-1)}$ 3
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n + 1}{n(n-1)} = 2$ 1


4) a) $\int_0^{24} f(t) dt \approx \frac{b-a}{3n} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4]$
 $= \frac{24-0}{3 \cdot 4} [9.6 + 4 \cdot (10.4) + 2 \cdot (11.4) + 4 \cdot (10.6) + 9.7] = 252.2$ 3 (mit $n=8$: 253.3)
 In 24 Stunden fließen ca. 252 m³ Wasser den Bach hinunter. 4
 b) $g(t) = G'(t) = (-3.44) \cdot (0.262) \cdot \cos(0.262t) + C$ 1
 Bestimmung von C:
 z.B. $f(0) = g(0)$: $9.6 = (-0.9) \cdot \cos(0) + C \Rightarrow C = 10.5$
 oder analog für $t=12$: $C=10.5$; $t=24$: $C=10.6$ etc.
 oder $\int_0^{24} f(t) dt = G(24)$: $252.2 = -3.44 \cdot \sin(0.262 \cdot 24) + C \cdot 24 \Rightarrow C = 10.503$
 $\Rightarrow g(t) = -0.901 \cdot \cos(0.262 \cdot t) + 10.5$ 2

5) a) Ebene ABC: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1
 $E_{ABC}: x + 2z - d = 0$; $A(1,2)$ liegt in E: $1 + 2 \cdot 1 - d = 0 \Rightarrow d = 3$
 $E_{ABC}: x + 2z - 3 = 0$ 2
 Abstand $(S, E_{ABC}) = \left| \frac{3 + 2 \cdot (-3) - 3}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{-6}{\sqrt{5}} \right| \Rightarrow \text{Höhe} = \frac{6}{\sqrt{5}} \approx 2.683$ 3
 b) Höhenlinie: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ geschnitten mit E_{ABC} : $(3+t) + 2(-3+2t) - 3 = 0 \Rightarrow t = 12$
 $\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 21 \end{pmatrix}$ 2
 Koordinatenvergleich z.B. x-Koord. $-3 \leq x_{ABC} \leq 1$, aber $x_F = 15$
 y-Koord. $1 \leq y_{ABC} \leq 5$, aber $y_F = 7$
 z-Koord. $1 \leq z_{ABC} \leq 3$, aber $z_F = 21$
 $\Rightarrow F$ ausserhalb ΔABC 3
 c) $\sin \alpha = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{n}_{E_{ABC}}|}{|\vec{SA}| |\vec{n}_{E_{ABC}}|} = 6 / (\sqrt{63.9} \cdot \sqrt{5}) = 0.336 \Rightarrow \alpha = 19.6^\circ$ 2P
 d) $AM = BM$: $\begin{cases} (u-1)^2 + (v-2)^2 + (w-1)^2 = (u+1)^2 + (v-5)^2 + (w-2)^2 \\ (u-1)^2 + (v-2)^2 + (w-1)^2 = (u+3)^2 + (v-1)^2 + (w-3)^2 \end{cases}$ 1
 $AM = CM$: $\begin{cases} (u-1)^2 + (v-2)^2 + (w-1)^2 = (u+3)^2 + (v-1)^2 + (w-3)^2 \\ (u-1)^2 + (v-2)^2 + (w-1)^2 = (u-3)^2 + (v-7)^2 + (w+3)^2 \end{cases}$
 M auf Normale zu Ebene E(ABC) durch U $\Rightarrow M(-1.2 + t; 2.5; 2.1 + 2t)$
 $SM = r$ (oder $AM = r$ etc.) $\Rightarrow (t-4.2)^2 + (2.5-7)^2 + (2t+5.1)^2 = \frac{486}{4}$
 $\Rightarrow t = -4.8$ (und nicht $t = 2.4$)
 $\Rightarrow M(-6; 2.5; -7.5)$ (und nicht $(1.2; 2.5; 6.9)$)
 $\Rightarrow$ Umkugel: $(x+6)^2 + (y-2.5)^2 + (z+7.5)^2 = \frac{486}{4}$ 4P

6) a) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729} = 0.00137$ 1
 b) $P(\text{genau zwei Keil } Z) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.3292$ 2
 c) $\{\vec{c}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{c}\}$ oder $\{\vec{c}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ oder $\{\vec{c}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\}$ oder $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\}$ 2
 d) je zwei Mal $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$: $P(\{\vec{c}, \vec{c}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}\}) = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2}}{3^6} = \frac{10}{81} = 0.123$ 3
 7) a) $P(X=0) = \left(\frac{583}{596}\right)^{50} = 0.7770$ 1; $P(X=1) = 1 - 0.7770 - 0.0176 - 0.0005 = 0.205$ 2
 b) $E(X) = 0 \cdot (0.7770) + 1 \cdot (0.205) + 2 \cdot (0.0176) + 3 \cdot (0.0005) = 0.24$ Bilder 2
 $V(X) = (0-0.24)^2 \cdot (0.777) + (1-0.24)^2 \cdot (0.205) + (2-0.24)^2 \cdot (0.0176) + (3-0.24)^2 \cdot (0.0005) = 0.22$
 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \Rightarrow \sigma(X) = 0.47$ 2

Notenskala und Resultate der MaturandInnen im Sommer 2006										
Punkte	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5
Anzahl Schüler	0	0	3	2	4	3	4	2	3	0