Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 7 Aufgaben mit 50 Punkten
- Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner, beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
- Jede der sieben Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen

---

1. [2P] Bestimmen Sie mit Hilfe von Ableitungen diejenige Stelle, wo der Graph von $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12$ die kleinste Steigung hat.

2. [4P] Eine Folge (a_n) mit $a_1 = 1$ soll folgende zwei Eigenschaften erfüllen:

(I) Es gibt eine reelle Zahl $q \neq 0$ so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = q^{n-1}$.

(II) Für jedes $n > 2$ gilt: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a) Geben Sie je ein Beispiel einer Folge, welche nur *eine* der beiden Eigenschaften erfüllt. Notieren Sie jeweils die ersten vier Glieder Ihrer Beispielfolgen.

b) Gesucht sind nun Folgen, welche *beide* Eigenschaften (I) und (II) besitzen. Berechnen Sie die beiden möglichen Werte für q $(\neq 0)$, und bestimmen Sie für denjenigen Fall, wo die (unendliche) Reihe konvergent ist, die Summe der Reihe.

3. [4P] Die Funktion h(t) gibt die Höhe der Flüssigkeit in einem Tank [in Metern] in Abhängigkeit der Zeit t [in Sek.] an. Es gilt $h(0) = 0$, $h'(0) = 0.02$ und $\lim_{t \to \infty} h(t) = 3$.

a) Erklären Sie die Bedeutung von $h'(0) = 0.02$ in Bezug auf die Flüssigkeit im Tank.

b) Es wird angenommen $h(t) = -a \cdot e^{bt} + c$. Bestimmen Sie a, b und c.

4. [7P] Die Graphen von $y = \cos(x^2)$ und $y = x$ und die y-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche. (x im Bogenmass!)

a) Skizzieren Sie die Graphen grob und schraffieren Sie die beschriebene Fläche. Benutzen Sie dazu Ihren Grafiktaschenrechner.

b) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven mit dem Newtonverfahren (Startwert $x = 1$) auf zwei Stellen genau.

c) Geben Sie einen Näherungswert für den Flächeninhalt, indem Sie ein passendes Integral mit der Parabelmethode (Simpson) für $n = 4$ auf zwei Stellen genau berechnen. Schreiben Sie Ihre Zwischenresultate genau auf.

5. [6P] Der Graph der Funktion $y = 8 - x^{1.5}$, die x-Achse und die y-Achse begrenzen eine Fläche, welche um die x-Achse rotiert wird.

a) Berechnen Sie das *Volumen* des Rotationskörpers.

b) Die vertikale Linie $x = k$ teilt die Fläche in zwei Teile, welche je um die x-Achse rotiert werden, so dass *volumengleiche Rotationskörper* erzeugt werden. Stellen Sie eine Gleichung für k auf, welche keine Ausdrücke mit Integralen mehr enthält, und lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe Ihres Taschenrechners.

Bitte wenden

6. [13P] Die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ schneidet die Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 16z - 65 = 0$ in zwei Punkten A und B. In diesen beiden Punkten werden die Tangentialebenen E_A und E_B an die Kugel gelegt. Bereits berechnet: $A(2,1,20)$ und $E_A: 4x - 3y - 12z + 235 = 0$.

a) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Tangentialebenen sowie eine Gleichung für die Schnittgerade von E_A und E_B.

b) Vom Punkt B aus wird im rechten Winkel auf die Ebene E_A ein Strahl ausgesandt, welcher an dieser Ebene reflektiert wird. Bestimmen Sie, wie viele Sekunden es dauert, bis der Strahl wieder im Punkt B eintrifft, wenn er sich mit einer Geschwindigkeit von 3 Längeneinheiten pro Sekunde ausbreitet.

7. [14P] Dieses Jahr geht Amelda monatlich genau ein Mal auf Einkaufstour in die Marktgasse. Die Wahrscheinlichkeit, eine CD zu kaufen, beträgt jedes Mal 20%.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Amelda im Laufe des Jahres höchstens drei CDs kauft.

b) Die Zufallsgrösse X gibt die Anzahl CDs an, welche Amelda Ende Jahr besitzen wird ($0 \leq X \leq 12$). Als aussergewöhnlich gilt diese Zahl, wenn sie mehr als zwei Standardabweichungen vom Erwartungswert von X abweicht. Bestimmen Sie, welche Resultate zwischen 0 und 12 als aussergewöhnlich gelten.

Im Moment ist Amelda auf der Suche nach einer Digitalkamera. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit einer Kamera nach Hause kommt, beträgt für die nächsten drei Einkaufstouren je 0.4. Auf der vierten Einkaufstour wird sie, wenn sie bis dann noch nichts gefunden hat, auf jeden Fall eine Kamera kaufen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Amelda genau auf der dritten Einkaufstour eine Digitalkamera kauft.

d) Die Zufallsgrösse Y gibt diejenige Einkaufstour an, bei welcher Amelda die Kamera kauft ($1 \leq Y \leq 4$). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von Y.

Amelda entdeckt ihre Vorliebe für Schuhe! Die Wahrscheinlichkeit, dass Amelda gleich auf der *ersten* Einkaufstour ein Paar Schuhe kauft, beträgt p_1. Wenn Amelda ein Paar Schuhe gekauft hat, erniedrigt sich die Wahrscheinlichkeit eines Einkaufs für die darauf folgende Einkaufstour um 10% auf $p_{n+1} = 0.9 \cdot p_n$. Wenn Amelda hingegen *keine* Schuhe gekauft hat, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten für die nächste Einkaufstour *nicht*.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Amelda n Mal hintereinander ein Paar Schuhe kauft. Vereinfachen Sie Ihr Resultat (welches p_1 und n enthält) so weit wie möglich.

f) Bestimmen Sie p_1 so, dass die Wahrscheinlichkeit in den ersten *zwei* Einkaufstouren genau ein Paar Schuhe zu kaufen, möglichst gross wird.

Ende Prüfung

1. $y' = 6x^2 + 6x + 6$, $y'' = 12x + 6$ 1↓, $y'' = 0$: $\boxed{x = -0.5}$ 2P

---

2. **a)** zum Beispiel (I): 1, 2, 4, 8, 16, ... ; (II): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 1P

b) $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$ 1↓ $\Rightarrow q^2 = q + 1 \Rightarrow \boxed{q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = -0.618 \text{ oder } 1.618}$ 2↓

Summe für $-1 < q < 1$: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(-0.618)} \Rightarrow \boxed{s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618}$ 3P

---

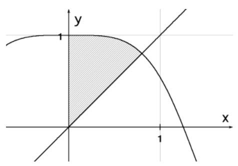
3. **a)** Zum Zeitpunkt t=0 nimmt die Höhe im Tank um 2 cm pro Sekunde zu. 1P

b) $h(0) = 0$: $0 = -a \cdot e^0 + c \Rightarrow a = c$ 1P ; $h'(0) = 0.02$: $0.02 = -a \cdot b \cdot e^0$ 1P $\Rightarrow$

$b = \frac{0.02}{-a} \Rightarrow \boxed{a = c = 3\ ,\ b = -\frac{2}{300} = -0.00667}$ 3P

---

4. **a)** Graph: 1P



b) Newtonfunktion $f(x) = x - \cos(x^2)$ 1↓

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n^2)}{1 + 2x \cdot \sin(x_n^2)}$ 2↓

$x_1 = 1$, $x_2 = 0.829$, $x_3 = 0.802$, $x_4 = 0.801 \Rightarrow \boxed{x \approx 0.80}$ 3P

c) Simpson: $\int_0^{0.80} \left(\cos(x^2) - x\right) dx \approx \frac{b-a}{3n} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$ 1↓

$= \frac{0.80}{12} \cdot \left(1 + 4\left(\cos(0.2^2) - 0.2\right) + 2\left(\cos(0.4^2) - 0.4\right) + 4\left(\cos(0.6^2) - 0.6\right) + 0\right)$ 2↓

$= \frac{0.80}{12} \cdot (1 + 4 \cdot (0.799) + 2 \cdot (0.587) + 4 \cdot (0.336) + 0) \Rightarrow \boxed{\text{Fläche} \approx 0.45}$ 3P

---

5. **a)** Volumen $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(8 - x^{3/2}\right)^2 dx$ 1↓ $\Rightarrow \boxed{V = 115.2\ \pi = 361.911}$ 2P

b) $\pi \cdot \int_0^k \left(8 - x^{3/2}\right)^2 dx = \frac{V}{2} = 57.6\pi$ 1↓ $\Rightarrow \int_0^k \left(64 - 16 \cdot x^{3/2} + x^3\right) dx = 57.6$ 2↓

$64k - \frac{32}{5} k^{5/2} + \frac{1}{4} k^4 - 57.6 = 0$ 3↓ $\Rightarrow \boxed{k = 0.9949}$ 4P

6. a) Kugel: $(x-6)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=13^2 \quad \Rightarrow M(6,-2,8)$;

$g \cap$ Kugel: $(3+t)^2+(3)^2+(-9-3t)^2=169 \quad \Rightarrow t^2+6t-7=0$ 2↓

$\Rightarrow t_1=-7$: $A(2,1,20)$; $t_2=1$: $B(10,1,-4)$ 3↓ $\Rightarrow \vec{n_B}=\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}4\\3\\-12\end{pmatrix}$ 4↓;

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{n_A}\cdot\vec{n_B}}{|\vec{n_A}|\cdot|\vec{n_B}|} \text{ +1P } =\frac{\begin{pmatrix}-4\\3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-12\end{pmatrix}}{13\cdot 13}=\frac{151}{169} \Rightarrow \boxed{\alpha=26.68^\circ}$$ 6P

$\left|\begin{matrix}E_B: 4x+3y-12z-91=0\\ E_A: 4x-3y-12z+235=0\end{matrix}\right|$ 1↓ ; Richtung von s = $\vec{n_A}\times\vec{n_B}=24\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ oder

gemeinsame Punkte von $E_A \cap E_B$: z.B. $(0,54\frac{1}{3},6)$, $(-18,54\frac{1}{3},0)$ 3↓

$\Rightarrow$ Schnittgerade von $E_A \cap E_B$ $\boxed{s:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\54\frac{1}{3}\\6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}}$ 4P

b) Abstand $(B,E_A)=\dfrac{320}{13}=24.6$ (Hesse'sche Normalform) 2↓

Weg: 2·24.6 = 49.23 Längeneinheiten $\Rightarrow$ Zeit: 49.23 / 3 = $\boxed{\text{16.41 Sek.}}$ 3P

---

7. a) Binomialverteilung mit n=12 und p=0.2 1↓ ; $B_{12,0.2}(X\le 3)=\boxed{0.79}$ 2P

b) $E(X)=12\cdot(0.2)=2.4$; $\sigma=\sqrt{12\cdot(0.2)\cdot(0.8)}=1.4$ 2↓

"normale" Werte für X: $(2.4)-2\cdot(1.4)\le X\le(2.4)+2\cdot(1.4) \Rightarrow -0.4\le X\le 5.2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Mehr als 5 CDs wären aussergewöhnlich.}}$ 3P

c) $P=(0.6)\cdot(0.6)\cdot(0.4)=\boxed{0.144}$ 1P

d)

Y	1	2	3	4
P	0.4	0.24	0.144	0.216

$\Rightarrow \boxed{E(Y)=2.176}$ 2P

e) $p_1\cdot(0.9p_1)\cdot(0.9^2p_1)\cdot\ldots\cdot(0.9^{n-1}p_1)=p_1^n\cdot 0.9^{1+2+\ldots+(n-1)}=\boxed{0.9^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot p^n}$ 2P

f) Wahrscheinlichkeit = $p_1\cdot(1-0.9p_1)+(1-p_1)\cdot p_1$ 2↓ $\Rightarrow f(p_1)=-1.9\cdot p_1^2+2\cdot p_1$

$\Rightarrow f'(p_1)=-3.8\cdot p_1+2=0 \Rightarrow$ Maximum von f bei $\boxed{p_1=0.526}$ 4P

Notenskala und Resultate der MaturandInnen im Sommer 2005										
Punkte	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5
Anzahl Schüler	2	2	2	4	2	0	1	1	1	0