Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 8 Aufgaben mit 50 Punkten
- Hilfsmittel: wissenschaftlicher, aber nicht grafikfähiger Taschenrechner; beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
- Jede der acht Aufgaben auf einem separaten A4-Blatt lösen

---

1. [4P] Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von $y = x^2 + \sqrt{x}$ im einzigen Wendepunkt der Kurve.

2. [4P] Der Graph der Funktion $f(x) = \ln(x)$, die x-Achse und die Gerade $x = 2$ begrenzen eine Fläche, welche um die x-Achse rotiert wird. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers nach der Parabelmethode (Simpson) für $n = 4$.

3. [4P] Wieder einmal wollen zu viele Autos den Gotthardtunnel passieren. Es wird angenommen, dass lauter identische Autos mit derselben konstanten Geschwindigkeit v (in km/h) fahren, dieselbe Fahrzeuglänge ℓ (in Metern) haben und denselben korrekten Sicherheitsabstand einhalten. Daraus ergibt sich eine Formel für die Zeit t (in Sekunden), die an einer festen Stelle, zum Beispiel dem Tunnelausgang, zwischen zwei vorbeifahrenden Fahrzeugen verstreicht: $t(v) = 1 + \frac{v}{50} + \frac{3.6 \cdot \ell}{v}$.

a) Diese Formel berücksichtigt die Reaktionszeit, den Bremsweg und die Fahrzeuglänge. Ordnen Sie jedem dieser drei Einflüsse den entsprechenden Summanden im Ausdruck für t(v) zu.

b) Zeigen Sie, dass am meisten Autos den Gotthardtunnel passieren können, wenn die Geschwindigkeit $v_1 = 6 \cdot \sqrt{5 \cdot \ell}$ beträgt. Bestimmen Sie auch, wie viele Autos von je 5 Metern Länge bei dieser optimalen Geschwindigkeit v_1 *in einer Stunde* durch den Gotthardtunnel Richtung Süden geschleust werden können.

4. [8P] Der Graph der Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x)$, wobei $x \geq 0$, begrenzt mit der x-Achse immer kleiner werdende Flächenstücke.

a) Zeigen Sie, dass $F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x} \cdot \left(\sin(x) + \cos(x)\right)$ eine Stammfunktion von f ist.

b) Zeigen Sie, dass die Inhalte der Flächenstücke zwischen $x = (k-1)\pi$ und $x = k\pi$ eine Folge mit $A_k = \frac{e^{\pi} + 1}{2} \cdot e^{-k \cdot \pi}$ bilden $(k = 1, 2, 3, ...)$.
[Teilpunkte können erzielt werden für die Berechnung des exakten Inhalts der Fläche zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ mit Hilfe eines Integrals.]

c) Zeigen Sie, dass die Folge A_k aus Aufgabe **b)** geometrisch ist und bestimmen Sie die Summe aller (unendlich vielen) Flächenstücke.

Bitte umblättern

5. [6P] Eine Kugel mit Mittelpunkt $M(9,4,4)$ *berührt* die Ebene, welche von den beiden Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Kugel.

6. [7P] Von einem geraden Kreiskegel sind die Spitze $S(5,10,2)$, der Mittelpunkt des Grundkreises $M(5,19,-10)$ sowie ein Punkt $P(1,22,6)$ auf der Kreiskegelfläche (bzw. dem Mantel) gegeben. Bestimmen Sie das Kegelvolumen exakt.

7. [8P] Die hiesige Leichtathletikvereinigung führt jeweils im Sommerhalbjahr an Mittwochnachmittagen die sogenannte "Leichtathletikschule für Kinder" durch.
Beim Saisonstart verkündete der Präsident zufrieden, dass es in den letzten sieben Jahren an nur einem einzigen Mittwoch geregnet habe.
Wir nehmen an, dass sieben Jahre lang pro Jahr 20 solche Trainings stattfanden und dass für jeden Mittwoch die Wahrscheinlichkeit p, dass es NICHT regnete, gleich gross war.
Es sei A das Ereignis, dass es an all diesen Mittwochen *höchstens einmal* regnete.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von A in Abhängigkeit des Parameters p.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten p, für welche P(A) kleiner als 1% ist, folgende Unlgeichung erfüllen: $13900 \cdot p^{140} - 14000 \cdot p^{139} + 1 > 0$
Lösen Sie nun diese *Ungleichung* für $0 \le p \le 1$, indem Sie zwei Schritte des Newtonverfahrens mit Startwert $p_0 = 0.95$ durchführen.
Schreiben Sie einen ausführlichen Antwortsatz zur Bedeutung Ihrer Lösung, welchen auch der Präsident der Leichtathletikvereinigung verstehen würde.

8. [9P] Die drei gleich grossen Sektoren eines Glücksrads sind mit den Augenzahlen 1, 3 bzw. 8 markiert. Vor dem Drehen des Glücksrads gibt die Spielerin eine beliebige natürliche Zahl an. Nach dem Drehen wird das Quadrat der Differenz zwischen dem Tipp der Spielerin und dem eingetretenen Ergebnis berechnet. Falls eine 3 oder eine 8 gedreht wurde, gibt dieses Quadrat die Anzahl *Verlust*punkte an. Falls jedoch eine 1 gedreht wurde, gibt's entsprechend *Plus*punkte.
Anna, zum Beispiel, tippt unbeirrt auf 7 (ihre Lieblingszahl). Wenn eine 1 gedreht wird, erhält sie $(7-1)^2 = 36$ Pluspunkte. Bei einer 3 gibt's jedoch $(7-3)^2 = 16$ Verlustpunkte.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna vier Mal hintereinander Pluspunkte holt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach vier Spielen eine negative Bilanz besitzt (d.h. mehr Verlust- als Pluspunkte).

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl Punkte (Pluspunkte minus Verlustpunkte) für Anna in *einem* Spiel.

d) Bea - flexibler als Anna - tippt auf Zahl t statt immer auf Zahl 7.
Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Anzahl Punkte pro Spiel
$E_t(X) = -\frac{1}{3} \cdot (t^2 - 20t + 72)$ beträgt, und leiten Sie daraus alle "vernünftigen" Tipps t her, d.h. Tipps, bei welchen auf die Länge mehr Plus- als Verlustpunkte resultieren.

Notenskala und Resultate der MaturandInnen im Sommer 2004										
Punkte	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5
Anzahl Schüler	2	2	3	1	5	2	1	2	0	0

1. $y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 1↓, $y'' = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ 2↓, $y'' = 0: x = 0.25$ 3↓ $\Rightarrow \boxed{y'(0.25) = 1.5}$ 4P

2. Figur mit Fläche oder Nullstelle $x = 1$ 1↓ $\Rightarrow V = \pi \cdot \int_1^2 (\ln(x))^2 \, dx$ 2↓

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$(\ln(x))^2$	$y_0=0$	$y_1=0.04979$	$y_2=0.16440$	$y_3=0.31317$	$y_4=0.48045$

$V \approx \pi \cdot \frac{1}{12} \cdot [y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4]$ +1P $= \pi \cdot \frac{1}{12} \cdot 2.2611 \Rightarrow \boxed{V \approx 0.592}$ 4P

3. a) 1 Sekunde: Reaktionszeit; $\frac{v}{50}$: Bremsweg; $\frac{3.6 \cdot \ell}{v}$: Fahrzeuglänge 1P

b) $t'(v) = \frac{1}{50} - \frac{3.6 \cdot \ell}{v^2}$ 1↓; $t' = 0: v_1^2 = 50 \cdot (3.6) \cdot \ell \Rightarrow v_1 = 6 \cdot \sqrt{5 \cdot \ell}$ 2P

$v_1 = 30 \, \mathrm{km/h} \Rightarrow t_{min} = 2.2 \text{ Sek.} \Rightarrow \frac{3600 \text{ Sek.}}{2.2 \text{ Sek.}} \approx$ $\boxed{\text{1636 Autos pro Stunde}}$ 1P

4. a) $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left[-e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x)\right] = e^{-x} \cdot \sin(x)$ 2P

(Bei Ableitung mit höchstens einem (Vorzeichen-)fehler: 1↓)

b) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left(e^{-x} \sin x\right) dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}$ 1↓

(k ungerade:) $= \left[-\frac{1}{2} e^{-k\pi} \cdot (0-1)\right] - \left[-\frac{1}{2} e^{-(k-1)\pi} \cdot (0+1)\right]$ 2↓ $= \boxed{\frac{e^{\pi}+1}{2} \cdot e^{-k \cdot \pi}}$

(k gerade: entsprechender negativer Wert $\Rightarrow$ Absolutbetrag) 3P

[Fläche $A_1 = \int_0^{\pi} \left(e^{-x} \sin x\right) dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cdot (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\pi}$

$= \left[-\frac{1}{2} e^{-\pi} \cdot (0-1)\right] - \left[-\frac{1}{2} e^{0} \cdot (0+1)\right] = \boxed{\frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi}+1}{2 e^{\pi}} \approx 0.5216}$ = 2P]

c) geometrische Folge für Flächen $A_n = A_1 \cdot q^{n-1}$ mit $q = e^{-\pi} \approx 0.0432$ 1P

Unendliche Summe $s = \frac{A_1}{1-q}$ 1↓ $= \frac{\frac{e^{\pi}+1}{2 e^{\pi}}}{1 - e^{-\pi}} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1} \approx 0.545}$ 3P

5. Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ 1↓ $\Rightarrow$ E: $3x+6y+2z-24=0$ 3↓

Radius $r = \text{Abstand}(M,E) = \dfrac{3\cdot 9+6\cdot 4+2\cdot 4-24}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}$ 4↓ $\Rightarrow r = 5$

$(x-9)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = r^2$ 1P $\Rightarrow \boxed{(x-9)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = 25}$ 6P

6. $V = \dfrac{\pi}{3}r^2 h$ mit $h = \overline{SM} = \sqrt{0^2+9^2+12^2} \Rightarrow h = 15$ 1P

Methode 1: $\varphi = \angle MSP$: $\cos(\varphi) = \dfrac{\overrightarrow{MS}\cdot\overrightarrow{PS}}{\overline{MS}\cdot\overline{PS}} = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\9\\-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\12\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{225}\cdot\sqrt{176}} = 0.3015$ 4↓

$\Rightarrow \varphi = 72.45° \Rightarrow r = h\cdot\tan(72.45°)$ 5P $\Rightarrow r = 47.434$

Methode 2: $r = \overline{MQ}$ mit $Q \in SP$ und $MQ \perp MS$ 1↓ :

$Q \in SP$: $Q(5-4t, 10+12t, 2+4t)$ oder $Q(5-s, 10+3s, 2+s)$ 2↓

$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MS} = 0$: $\begin{pmatrix}5-4t-5\\10+12t-19\\2+4t-(-10)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\9\\12\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{15}{4}$ (oder $s = 15$)

$\Rightarrow Q(-10, 55, 17)$ 4↓ $\Rightarrow r^2 = \overline{MQ}^2 = 15^2+36^2+27^2 = 2250$ 5P

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h = \dfrac{\pi}{3}\cdot 2250\cdot 15 = \boxed{11250\,\pi \approx 35342.9}$ 7P

7. a) Binomialverteilung mit $n = 140$: $P(A) = P(X \le 1) = \boxed{p^{140} + 140\cdot p^{139}\cdot(1-p)}$ 2P

b) $p^{140} + 140\cdot p^{139}(1-p) < 0.01 \Rightarrow 13900\cdot p^{140} - 14000\cdot p^{139} + 1 > 0$ 1P

$p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)} = p_n - \dfrac{13900\,p_n^{140} - 14000\,p_n^{139} + 1}{140\cdot 13900\,p_n^{139} - 139\cdot 14000\,p_n^{138}}$ 2↓

$p_0 = 0.95 \Rightarrow p_1 = 0.9544$ 3↓ $\Rightarrow p_2 = 0.95357 \Rightarrow \boxed{L = \{0 \le p < 0.95357\}}$ 4P

Wenn es öfter als ca. jeden 20. Nachmittag regnet, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aussage des Präsidenten stimmt, kleiner als 1%. 1P

8. a) P (Anna holt viermal hintereinander Pluspunkte) = $\boxed{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81} \approx 0.0123}$ 1P

b) P = P(keine 1) + P({1,3,3,3}) = $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \boxed{\dfrac{20}{81} \approx 0.2469}$ 2P

c) $E(X) = \tfrac{1}{3}\cdot 36 + \tfrac{1}{3}\cdot(-16) + \tfrac{1}{3}\cdot(-1) \Rightarrow \boxed{E(X) = \dfrac{19}{3}}$ 1P

d) $E_t(X) = \tfrac{1}{3}\cdot(t-1)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(t-3)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot(t-8)^2 = -\dfrac{1}{3}\cdot(t^2-20t+72)$ 2P

$t^2 - 20t + 72 = 0 \Rightarrow t_1 = 4.7$; $t_2 = 15.3$ 2↓

$E_t(X) > 0$: $4.7 < t < 15.3 \Rightarrow$ "vernünftige" Tipps: $\boxed{5, 6, 7, \ldots, 13, 14, 15}$ 3P