Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 6 Aufgaben mit 50 Punkten
- Hilfsmittel: wissenschaftlicher, aber nicht grafikfähiger Taschenrechner; beliebige Formelsammlung
- Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
- Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben

---

1. [12P] Die erste Aufgabe besteht aus vier voneinander unabhängigen Kurzaufgaben.

a) In einem Tennisturnier spielt Kim gegen Serena. Es gilt zwei Sätze zu gewinnen, wobei jeder Satz auf 6 Punkte gespielt wird. (Für Tenniskenner: Es gibt keine Sätze auf 7 Punkte und kein "Tie-Break". Sätze können 6:5 enden.)
Mögliche Resultate sind also beispielsweise: Kim gewinnt (in zwei Sätzen) 6:5, 6:0 oder Kim verliert (in drei Sätzen) 5:6, 6:3, 5:6 etc.
Bestimmen Sie die Anzahl möglicher Resultate.

b) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die x-Koordinate des Schnittpunkts der Graphen von $y = \ln(x)$ und $y = \cos(x)$ (x im Bogenmass), indem Sie einen einzigen Schritt des Newtonverfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ durchführen.

c) Die Ebene mit der Gleichung $x - 2y + 3z - 4 = 0$ ist Tangentialebene einer Kugel mit Mittelpunkt $M(1,1,1)$. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Kugel.

d) Die rekursiv definierte Folge $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$ hat eine explizite Darstellung der Form $a_n = p \cdot n^2 + q \cdot n$. Bestimmen Sie p und q.

Aufgaben 2 bis 6 bitte je auf einem separaten A4-Blatt lösen.

2. [7P] Gegeben sind die Strecken PQ und RS mit $P(-1,-1)$, $Q(0,0)$, $R(1,1)$ und $S(2,1)$. Die Strecken PQ und RS werden durch ein Kurvenstück verbunden, welches ein Teil einer ganz-rationalen Funktion dritten Grades ist.
Die Funktionsgleichung für $0 < x < 1$ hat die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Die Übergange bei Q und R sollen "glatt" sein, d.h. keine scharfen Ecken aufweisen.
Bestimmen Sie die Steigung des Kurvenstücks an der steilsten Stelle.

3. [12P] Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $M(2,4,2)$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die g und M enthält.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $L(3,6,0)$ Fusspunkt des Lots von M auf g ist und dass der Abstand von M zur Geraden g drei Längeneinheiten beträgt.

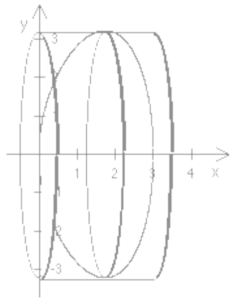
Benutzen Sie die Angaben aus Aufgabe **b)** zur Lösung der Aufgaben **c)** und **d)**.

c) M ist der Mittelpunkt eines Quadrats ABCD, dessen Ecken A und B auf der Geraden g liegen.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Quadrats.

d) Über dem Quadrat ABCD wird eine gerade Pyramide errichtet, d.h. die Spitze S liegt senkrecht "über" M. Die Seitenfläche der Pyramide, welche die Kante AB enthält, liegt in der Ebene mit der Gleichung $4x + 5y - 2z + d = 0$.
Berechnen Sie den Wert von d und die Koordinaten der Pyramidenspitze S.

Bitte umblättern

4. [7P] Der Graph der Funktion $f(x)=\sqrt{x(9-x^2)}$ begrenzt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück, welches um die x-Achse gedreht wird. Dem so entstandenen Rotationskörper wird der kleinste gerade Kreiszylinder mit gleicher Symmetrieachse umbeschrieben (siehe Figur).
Berechnen Sie das Verhältnis der beiden Volumina.



5. [6P] Der diagnostische Test AL liefert mit 90% Wahrscheinlichkeit ein positives Resultat, wenn er bei einer Person, welche unter der seltenen Krankheit Matamatitis leidet, durchgeführt wird. Er liefert aber mit der Wahrscheinlichkeit $1/11$ ein fälschlicherweise positives Resultat für gesunde Menschen.
Man weiss, dass 1% der Bevölkerung von Matamatitis betroffen ist.

a) Der zufällig ausgewählte R.K. (Name der Redaktion bekannt) wurde positiv getestet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass R.K. von Matamatitis betroffen ist.

b) Um Kranke genauer identifizieren zu können, wird bei all denjenigen, die mit AL positiv getestet wurden, ein zweiter Test (STEP) durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine kranke Person mit STEP positiv getestet wird, beträgt 90%. Bei einer gesunden Person liefert dieser zweite Test mit der unbekannten Wahrscheinlichkeit p ein fälschlicherweise positives Resultat. Von den Personen, die zuerst mit AL positiv, dann mit STEP positiv getestet wurden, sind drei von vier wirklich von Matamatitis betroffen. Bestimmen Sie p.

6. [6P] Anna, Gymnasiastin der Klasse 2c, kämpft mit dem Fach Biologie (hat aber zum Glück mit Mathematik keine Mühe). Aufgrund ihrer letztjährigen Resultate wird geschätzt, dass Anna mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 an einer Biologie-Prüfung eine ungenügende Note erzielen wird, und zwar - unabhängig voneinander - bei jeder der drei im Laufe des kommenden Semesters zu erwartenden Prüfungen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna am Schluss des Semesters nicht mehr als eine ungenügende Biologie-Note erzielt haben wird.

Anna entschliesst sich bei Beni Nachhilfestunden zu nehmen. Annas Eltern offerieren Beni entweder einen festen Lohn von 20 Franken pro Lektion oder dann einen (am Ende des Semesters ausbezahlten) erfolgsabhängigen Lohn, nämlich $\frac{36}{k+1}$ Franken pro Lektion, wobei k die Anzahl ungenügender Biologie-Noten angibt $(0 \le k \le 3)$.
Beni muss sich am Anfang des Semesters für eine der beiden Varianten entscheiden und geht in seinen Überlegungen vorsichtigerweise davon aus, dass sich die Wahrscheinlichkeit einer ungenügenden Note für Anna (nämlich p=0.3) im Laufe des Semesters *nicht* verändern wird.

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Lohns pro Lektion bei der erfolgsabhängigen Bezahlung höher ist als bei der festen Bezahlung.

c) Notieren Sie Überlegungen, welche Beni trotz dem Resultat von Aufgabe **b)** veranlassen könnten, sich für die feste Bezahlung zu entscheiden. Benutzen Sie in Ihrer Argumentation Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte oder Varianzen, ohne grössere zusätzliche Berechnungen durchzuführen.

Lösungen Maturitätsprüfung Mathematik schriftlich Juli 2003 – Klasse 4bN

1. **a)** Kim gewinnt in zwei Sätzen: 6·6 = 36 Möglichkeiten (je 0,1,...,5 P für S.) 1↓
Kim gewinnt, verliert aber den ersten Satz: 6·6·6 =216 Möglichkeiten

Kim gewinnt, verliert aber den mittleren Satz: nochmals 216 Möglichkeiten 2↓

Total: $2\cdot(36+216+216) = \boxed{936 \text{ Möglichkeiten}}$ 3P

b) $x_1 = x_0 - \dfrac{\ln x_0 - \cos x_0}{\frac{1}{x_0} + \sin x_0}$ 2↓ $\Rightarrow \boxed{x_1 = 1.293}$ 3P (genauer x≈1.303)

c) $r = \left|\dfrac{1\cdot 1 - 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}}\right|$ 1↓ $= \dfrac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \dfrac{2}{7}}$ 3P

d) $a_2 = 3,\ a_3 = 6$ 1↓ $\Rightarrow \left|\begin{array}{r} p + q = 1 \\ 4p + 2q = 3 \end{array}\right|$ 2↓ $\Rightarrow \boxed{p = \dfrac{1}{2},\ q = \dfrac{1}{2}}$ 3P

2. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;\quad \begin{array}{rl} f(0) = 0 & : \\ f'(0) = 1 & : \\ f(1) = 1 & : \\ f'(1) = 0 & : \end{array} \left|\begin{array}{r} d = 0 \\ c = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right|$ 3↓ $\Rightarrow f(x) = -x^3 + x^2 + x$ 4↓

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ 6↓ $\Rightarrow \boxed{f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{3}}$ 7P

3. **a)** Parameterdarstellung der Ebene 1↓ $\Rightarrow \boxed{2x + y + 2z - 12 = 0}$ 3P

b) $g \perp ML$: $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ ✓; $L \in g$ mit t=1; $\overline{ML} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ 3P

c) $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{ML} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AL},\ \overrightarrow{BL} = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A(5,4,-1),\ B(1,8,1)}$ 2↓

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, bzw. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow \boxed{C(-1,4,5),\ D(3,0,3)}$ 3P

d) mit Hilfe von Punkt A, B, L oder $(7,2,-2)$ in Ebene E_2: $\boxed{d = -42}$ 1P

Senkrechte auf E_1 mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch Punkt M: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

schneidet Ebene E_2: $4(2+2t) + 5(4+t) - 2(2+2t) - 42 = 0$ 2↓

$\Rightarrow t = 2 \Rightarrow$ Durchstosspunkt / Spitze $\boxed{S(6,6,6)}$ 3P

4. Rotationskörper: $V_R = \pi \cdot \int_0^3 \left(9x - x^3\right) dx$ 1↓ $= \pi \cdot \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3 = \frac{81\pi}{4} \approx 63.617$ 3P

Zylinder: $V_Z = \pi \cdot r^2 h$ mit Höhe $h = 3$ und Radius $r = y_{max}$ 1P

$y' = 0:\ 9 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ 2P $\Rightarrow y_{max} = \sqrt{6 \cdot \sqrt{3}} \approx 3.2237$

$V_Z = \pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right) \cdot 3 = 18\pi\sqrt{3} \approx 97.945$

$V_R : V_Z = \left(\frac{81\pi}{4}\right) : \left(18\pi\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{V_R : V_Z = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495}$ (oder $V_Z : V_R \approx 1.54$) 7P

5. a)

- 0.01 krank
  - 0.9 Test positiv
  - 0.1 Test negativ
- 0.99 gesund
  - $\frac{1}{11}$ Test positiv
  - $\frac{10}{11}$ Test negativ

1↓

$P(\text{krank / Test positiv}) = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 + 0.99 \cdot \frac{1}{11}} = \boxed{0.0909}$ 3P

b)

- 0.01 krank
  - 0.9 AL positiv
    - 0.9 STEP positiv
    - 0.1 STEP negativ
  - 0.1 AL negativ
- 0.99 gesund
  - $\frac{1}{11}$ AL positiv
    - p STEP positiv
    - $1-p$ STEP negativ
  - $\frac{10}{11}$ AL negativ

1↓

$P(\text{krank und AL und STEP positiv}) = 3 \cdot P(\text{gesund und AL und STEP positiv})$

$\Rightarrow 0.01 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 3 \cdot \left(0.99 \cdot \frac{1}{11} \cdot p\right) \qquad \Rightarrow \boxed{p = 0.03}$ 3P

6. a) Binomialverteilung mit $n = 3$ und $p = 0.3$: $P(X \leq 1) = ?$ 1↓

$P = \binom{3}{0} \cdot (0.3)^0 \cdot (0.7)^3 + \binom{3}{1} \cdot (0.3)^1 \cdot (0.7)^2 = 0.343 + 0.441 = \boxed{0.784}$ 2P

b) Tabelle für Zufallsgrösse X: Lohn pro Lektion bei erfolgsabhängiger Bezahlung: 2↓

Anzahl ungenügende Noten k	0	1	2	3
Lohn pro Lektion in Franken x_k	36	18	12	9
Wahrscheinlichkeit p_k	0.343	0.441	0.189	0.027

$E(X) = 36 \cdot 0.343 + 18 \cdot 0.441 + 12 \cdot 0.189 + 9 \cdot 0.027 = \boxed{22.80 \text{ Fr.} > 20.00 \text{ Fr.}}$ 3P

c) zum Beispiel: P(erfolgsabhängige Bezahlung höher) = 0.343 < 0.5 oder

Varianz der erfolgsabhängigen Bezahlung ist höher, also ist das Risiko höher. 1P

Skala und Verteilung:

Punkte	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4
Note	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5
Anzahl Schüler	2	1	2	3	3	2	2	3	1	0