Maturitätsprüfung **Mathematik** schriftlich

- Zeit: 3 Stunden für 6 Aufgaben mit 51 Punkten
 - Bewertung: Für die Note 6 muss die Maximalpunktzahl nicht erreicht werden
 - Hilfsmittel: wissenschaftlicher, aber nicht grafikfähiger Taschenrechner; beliebige Formelsammlung
 - Lösungswege klar nachvollziehbar aufschreiben
 - Numerische Ergebnisse wenn möglich exakt, andernfalls sinnvoll gerundet angeben
-

1. [10P] Die erste Aufgabe besteht aus vier voneinander unabhängigen Kurzaufgaben.

- a) Der Graph von $f(x) = ax + b \cos x$ soll im Punkt $P\left(\frac{1}{2}\pi, -3\pi\right)$ des Graphen die Steigung -5 haben. Bestimmen Sie die Werte von a und b .
- b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von $f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$, deren Graph durch den Punkt $P(-1,6)$ geht.
- c) Für welchen Wert des Parameters a hat der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2 - x - a}{x - 5}$ eine stetig behebbare Definitionslücke?
- d) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Kugel mit Radius 13, für die die y - z -Ebene Tangentialebene ist und deren Mittelpunkt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt. (Eine Lösung genügt.)

Aufgaben 2 bis 6 bitte je auf ein separates A4-Blatt lösen.

2. [7P] Gegeben die Funktion $f(x) = \sqrt{ax}$. Dreht man die Kurve von f im Bereich $0 \leq x \leq t$ um die x -Achse, so entsteht als Rotationskörper ein liegender "Becher".
 - a) Zeigen Sie, dass das Volumen dieses "Bechers" $\frac{\pi a t^2}{2}$ beträgt.
 - b) Die Werte der Parameter a und t werden nun so gewählt, dass der Becher einen Volumeninhalt von 8 Volumeneinheiten hat und der Abstand des Becherrandes vom Nullpunkt möglichst klein ist. Bestimmen Sie den Wert des Parameters t .
3. [10P] Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{2}(x - 2k) \cdot e^{\frac{1}{k}x}$ (für $k > 0$).
 - a) Bestimmen Sie Nullstelle und Extremstelle von f_k (in Abhängigkeit von k).
 - b) Zeigen Sie, dass $x=0$ für alle Graphen der Funktionen f_k eine Wendestelle ist.
 - c) Zeigen Sie, dass die Tangenten in den Wendepunkten der Graphen von f_k alle zueinander parallel sind.
 - d) Alle Extrempunkte der Funktionen f_k liegen auf einer bestimmten Kurve. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktionskurve.
 - e) $F_k(x) = \frac{k}{2}(x - 3k) \cdot e^{\frac{1}{k}x}$ ist eine Stammfunktion von f_k . Benutzen Sie diese, um den Flächeninhalt der ins Unendliche reichenden Fläche, die von der x -Achse (als Asymptote) und dem Graphen von f_k begrenzt wird, zu ermitteln.

4. [10P] Die Gerade g geht durch die beiden Punkte $A(1,-3,2)$ und $B(5,-1,3)$.
Die Gerade h geht durch die beiden Punkte $C(6,-6,3)$ und $D(10,-10,5)$.
- Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander sind.
 - Die Ebenen ε_g und ε_h werden so gelegt, dass sie die Geraden g bzw. h enthalten und zueinander parallel sind. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von ε_g .
 - S sei die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks CDS mit Basis CD , wobei S in der Ebene ε_g liegen und der Flächeninhalt von Dreieck CDS möglichst klein sein soll. Bestimmen Sie den minimalen Flächeninhalt von Dreieck CDS .
(Wenn Sie in Aufgabe **b**) keine Koordinatengleichung für ε_g ermitteln konnten, rechnen Sie statt dessen mit der Ebene ε_g' : $x - y + 4z - 12 = 0$ weiter.)
 - Punkt B wird nun parallel zur z -Achse verschoben ($\rightarrow$ Punkt B') und Punkt D wird parallel zur x -Achse verschoben ($\rightarrow$ Punkt D') und zwar so, dass die neuen Geraden AB' und CD' parallel werden.
Bestimmen Sie die Koordinaten von B' und D' .
5. [7P] Die n in einer Reihe stehenden Pfosten eines Zauns werden mit den Farben rot, blau oder weiss so bemalt, dass keine zwei nebeneinander stehenden Pfosten dieselbe Farbe haben. (Es müssen nicht alle drei Farben verwendet werden.)
- Auf wie viele Arten können die n Pfosten bemalt werden, wenn der erste Pfosten rot ist?
 - Auf wie viele Arten können 5 Pfosten bemalt werden, wenn der erste und der letzte Pfosten rot sind?
 - Aus all den Möglichkeiten von Aufgabe **b**) wird "auf gut Glück" eine ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (bei $n=5$), dass der dritte Pfosten rot ist?
 - Auf wie viele Arten können 5 Pfosten bemalt werden, wenn der erste Pfosten rot, aber der letzte *nicht* rot ist?
 - r_n sei die Anzahl Möglichkeiten, die n Pfosten zu bemalen, wenn der erste und der letzte Pfosten rot sind. Bestimmen Sie r_6 (zum Beispiel mit Hilfe der Resultate von oben) und leiten Sie eine rekursive Formel zur Berechnung von r_{n+1} aus r_n her.
6. [7P] Kleine Katamarane werden von nur zwei Motoren, grosse Katamarane aber von vier je 500 PS starken Motoren angetrieben. Der Ausfall der einzelnen Motore wird als voneinander unabhängig angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Motor ausfällt, sei p .
- Für den grossen Katamaran "Lee-Jet" gilt $p=0.02$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen genau 2 der 4 Motoren aus?
 - Katamarane sind noch manövrierfähig, wenn nicht mehr als die Hälfte der Motoren ausfallen. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein grosser Katamaran nicht mehr manövrierfähig ist, $4p^3 - 3p^4$ beträgt.
 - Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe **b**), um zu bestimmen, für welchen Wert von p die Wahrscheinlichkeit, dass ein grosser Katamaran nicht mehr manövrierfähig ist, gleich gross ist wie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Motoren eines kleinen Katamarans funktionieren. Führen Sie dazu zwei Schritte des Newtonverfahrens durch.

1. a) $-3\pi = a \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \Rightarrow a = -6$ 1P;

$y' = a - b \sin x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = a - b$ 1P $\Rightarrow -5 = (-6) - b \Rightarrow a = -6, b = -1$ 3P

b) $\int \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} dx = 3 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x} + C$ 2P $\Rightarrow 6 = 0 - 1 + C \Rightarrow F(x) = 3 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x} + 7$ 3P

c) $x=5$ eingesetzt im Zähler: $5^2 - 5 - a = 0 \Rightarrow a = 20$ 1P

d) $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = 13^2$ 1P; $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $u=13$ 2P

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 \\ t_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(13, -9, 23) \\ M_2(-13, 17, -42) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-13)^2 + (y+9)^2 + (z-23)^2 = 169 \\ (x+13)^2 + (y-17)^2 + (z+42)^2 = 169 \end{cases}$ 3P

2. a) $V = \pi \cdot \int_0^t (\sqrt{a \cdot x})^2 dx$ 1P $= \frac{a \cdot \pi}{2} x^2 \Big|_0^t = \frac{a \cdot \pi}{2} \cdot (t^2 - 0^2) = \frac{\pi \cdot a \cdot t^2}{2}$ 2P

b) $\frac{\pi \cdot a \cdot t^2}{2} = 8 \Rightarrow a = \frac{16}{\pi \cdot t^2}$ 1P; $d^2 = t^2 + (\sqrt{a \cdot t})^2$ 1P $= t^2 + \frac{16}{\pi \cdot t^2} \cdot t = f(t)$ 3P

$f'(t) = 2t - \frac{16}{\pi \cdot t^2} = 0$ 4P $\Rightarrow t^3 = \frac{8}{\pi} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \approx 1.366$ 5P

3. a) $f'_k(x) = \frac{1}{2} \left[1 \cdot e^{\frac{1}{k}x} + (x-2k) \cdot e^{\frac{1}{k}x} \cdot \frac{1}{k} \right]$ 1P $= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{k}x} \cdot \left(\frac{x}{k} - 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2k \\ x_E = k \end{cases}$ 3P

b) $f'_k(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} \cdot e^{\frac{1}{k}x} + \left(\frac{x}{k} - 1 \right) \cdot e^{\frac{1}{k}x} \cdot \frac{1}{k} \right]$ 1P $= \frac{1}{2k} e^{\frac{1}{k}x} \cdot \left(1 + \frac{x}{k} - 1 \right) = 0 \Rightarrow x_W = 0$ 2P

c) $f'_k(x=0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (unabhängig von k) 1P

d) $x_E = k, f(x_E = k) = \frac{1}{2} \cdot (-k) \cdot e^{\frac{1}{k}k}$ 1P $\Rightarrow y = -\frac{e}{2} \cdot x$ 2P

e) $\int_{-\infty}^{2k} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{2k} = \frac{k}{2} (x-3k) \cdot e^{\frac{1}{k}x} \Big|_{-\infty}^{2k}$ 1P $= \frac{k}{2} \cdot ((-k) \cdot e^2 - 0) \Rightarrow A = \frac{1}{2} e^2 k^2$ 3P

4. a) $\begin{cases} 1+4s=6+4t \\ -3+2s=-6-4t \\ 2+s=3+2t \end{cases}$ $\boxed{1\downarrow}$; System hat keine Lösung und (g und h schneiden sich nicht)

Richtungsvektoren sind nicht parallel: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\boxed{\text{g und h sind windschief}}$ $\boxed{2P}$

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -24 \end{pmatrix}$ $\boxed{1\downarrow}$

$\Rightarrow \varepsilon_g: 2x - y - 6z + d = 0$; A oder B $\in \varepsilon_g \Rightarrow d = 7 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_g: 2x - y - 6z + 7 = 0}$ $\boxed{2P}$

c) $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot d(M_{\overline{CD}}, \varepsilon_g)$ $\boxed{1\downarrow}$; $\overline{CD} = 6$; $M_{\overline{CD}}(8, -8, 4)$; HNF für $d(M_{\overline{CD}}, \varepsilon_g)$ $\boxed{2\downarrow}$

$d = \frac{2 \cdot 8 - (-8) - 6 \cdot 4 + 7}{\sqrt{41}} = \frac{7}{\sqrt{41}}$ $\boxed{3\downarrow} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{7}{\sqrt{41}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{21}{\sqrt{41}} = 3.280}$ $\boxed{4P}$

(HNF mit ε_g : $d' = \frac{20}{\sqrt{18}} \Rightarrow A' = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{20}{\sqrt{18}} \Rightarrow A' = \frac{60}{\sqrt{18}} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14.142$)

d) $k \cdot \overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ z = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} B'(5, -1, 1) \\ D'(-2, -10, 5) \end{matrix}$ $\boxed{2P}$

5. a) 2^{n-1} Möglichkeiten $\boxed{1P}$

b) RWBWR, RBWBR, RWRWR, RWRBR, RBRWR, RBRBR: $\boxed{6}$ Möglichkeiten $\boxed{1P}$

c) $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\boxed{1P}$ d) $2^{5-1} - 6 = 16 - 6 = \boxed{10}$ Möglichkeiten $\boxed{1P}$

e) $r_6 = 10$ $\boxed{1P}$; $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ $\boxed{2P}$

6. a) $P = \binom{4}{2} \cdot (0.02)^2 \cdot (0.98)^2 = \boxed{0.0023}$ $\boxed{2P}$

b) X = Anzahl ausfallende Motoren:

$P(X=3) + P(X=4) = 4 \cdot (1-p) \cdot p^3 + p^4 = \boxed{4p^3 - 3p^4}$ $\boxed{2P}$

c) $4p^3 - 3p^4 = (1-p)^2 \Rightarrow f(p) = 3p^4 - 4p^3 + p^2 - 2p + 1 = 0$ und $p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ $\boxed{1\downarrow}$

$p_1 = 0.5$; $p_2 = p_1 - \frac{3p_1^4 - 4p_1^3 + p_1^2 - 2p_1 + 1}{12p_1^3 - 12p_1^2 + 2p_1 - 2}$ $\boxed{2\downarrow} = 0.475 \Rightarrow p_3 = \boxed{p = 0.47486}$ $\boxed{3P}$